

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

**А.С. Городецкий
И.Д. Евзеров**

Компьютерные модели конструкций



Киев «ФАКТ» 2005

УДК 624.012.3:681.3.06

Компьютерные модели конструкций.

А.С. Городецкий, И.Д. Евзеров.

– К.: издательство «Факт», 2005. – 344 с.

Книга предназначена для специалистов, проектирующих конструкции строительных сооружений и в своей работе применяющих компьютеры.

Рассматриваются теоретические основы метода конечных элементов как основного расчетного инструмента. Много внимания уделяется вопросам сходимости, оценки приближенного решения, особенностям применения МКЭ для различных типов конструкций. Много места уделено нелинейным задачам, включая физическую и геометрическую нелинейность, односторонние связи, трение, устойчивость, нелинейную динамику.

Основное внимание уделяется методам и приемам построения компьютерных моделей. Здесь рассматривается моделирование не только отдельных конструктивных решений (опорные закрепления, шарниры, проскальзывание, контактные задачи и др.) и часто встречающихся конструкций (конструкции, работающие совместно с грунтовым основанием, вантовые конструкции, конструкции высотных зданий и др.), но и моделирование процессов, связанных с жизненным циклом конструкции – предварительное натяжение, приспособляемость, возведение и др.

В приложении приводится набор верификационных примеров, которые могут служить оселком для различных методов, в том числе и реализованных в различных программных комплексах.

Книга может быть также полезна исследователям, изучающим работу различных типов конструкций, разработчикам программных комплексов и студентам, изучающим методы расчета и проектирования конструкций.

УДК 721.01:624.012.3:681.3.06

Рецензент: Д-р техн. наук, профессор А.О. Рассказов.

Рекомендовано к печати Ученым советом НИИ автоматизированных систем в строительстве (НИИАСС) Госстроя Украины.

© ООО «ЛИРА софт», 2005

ISBN 966 – 359 – 027 – 0

По вопросам распространения обращаться по адресу:

Украина, 03037, г.Киев, ул. М.Кривоноса, 2-а, оф. 81 т. + (38 044) 2493547

Содержание

От авторов	6
О построении материала книги	7
Предисловие	9
Глава 1 Проблемы компьютерного моделирования	11
1.1 Путь к компьютерным моделям Ретроспектива. Возможное развитие	11
1.2 Глубина моделирования	17
1.3 Расчет – это способ рассуждения	21
1.4 Программные комплексы – инструментарий компьютерного моделирования	23
Литература к главе 1	27
Глава 2 Основы теории метода конечных элементов. Инженерный подход	30
2.1 Основные положения	30
2.2 Выбор базисных функций и узловых неизвестных	37
2.3 Исследование конечных элементов	42
2.4 Связь МКЭ с методами строительной механики стержневых систем	46
2.5 Применение МКЭ для решения линейных задач	50
2.6 Применение МКЭ для решения нелинейных задач	58
2.7 Решение систем нелинейных уравнений	61
2.8 Физическая нелинейность	66
2.9 Геометрическая нелинейность	68
2.10 Устойчивость	72
2.11 Односторонние связи. Трение	73
2.12 Динамика	76
Литература к главе 2	80
Глава 3 Компьютерная реализация	83
3.1 Интуитивная графическая среда пользователя	83
3.2 Составление канонических уравнений МКЭ	88
3.3 Решение систем уравнений высоких порядков	93
3.4 Глобальные, местные, локальные системы координат, углы чистого вращения	100
3.5 Реализация граничных условий Расчет на заданные перемещения	
Кинематическая связь перемещений	103
3.6 Определение геометрических характеристик сечений стержней	108
3.7 Определение усилий и напряжений	113
3.8 Организация расчета конструкций с учетом изменения расчетных схем в процессе возведения	115
3.9 Расчетные сочетания усилий (PCY) Расчетные сочетания нагрузжений (PCN)	117
3.10 Конструирующие системы	120
Литература к главе 3	126
Глава 4 Компьютерные модели. Построение, анализ, опыт, возможные ошибки, рекомендации	128
4.1 Построение конечно-элементных моделей	128
4.2 Стратификация, фрагментация, суперэлементы	137
4.3 Моделирование конструктивных решений узлов – опорные закрепления, податливость соединений, шарниры, трение	140
4.4 Абсолютно жесткие вставки (тела). Объединение перемещений	142
4.5 Применение различных систем координат	146
4.6 Рассуждения на тему, почему узлы ферм рассчитываются шарнирными, а конструируются жесткими	148
4.7 Вантовые конструкции, мембраны, предварительное натяжение	150

4.8 Контактные задачи.	155
4.9 Конструкции, работающие совместно с грунтовым основанием	157
4.10 Плиты перекрытий, усиленные балками	165
4.11 Конструкции высотных зданий из монолитного железобетона	171
4.12 Моделирование процесса возведения.	192
4.13 Моделирование процесса нагружения.	197
4.14 Компьютерное моделирование жизненного цикла конструкции	203
4.15 Как проверить правильность полученных результатов компьютерного моделирования.	205
Литература к главе 4	210
Приложение 1 Математические основы МКЭ	212
Линейная статическая задача	213
Трехмерная задача	213
Стержни	216
Пластины (оболочки)	222
Метод конечных элементов для линейной статической задачи	227
Математическая постановка	227
Основные теоремы о сходимости МКЭ	231
Конечные элементы для линейной статической задачи	239
Конечный элемент стержня	240
Конечные элементы плоской и объемной задач и толстой плиты	241
Конечные элементы тонкой изгибаемой плиты	242
Нелинейные статические задачи	244
Приближенные методы решения нелинейных статических задач	244
Оценки погрешности приближенных методов	248
Геометрически нелинейные задачи	251
Задачи устойчивости	258
Нелинейная упругость	259
Задача с односторонними ограничениями	263
Нестационарные задачи (динамика)	268
Линейная динамическая задача	268
Разностные схемы для линейной динамической задачи	272
Геометрически нелинейные динамические задачи	275
Задачи вязко-упруго-пластичности	278
Односторонние динамические задачи	281
Обозначения	282
Список литературы	290
Приложение 2 Верификационные тесты	294
Тест 1 Пространственная рама с упругими опорами	295
Тест 2 Плоская ферма	297
Тест 3 Балка с затяжкой	298
Тест 4 Прямоугольная плита	299
Тест 5 Круглая плита	300
Тест 6 Цилиндр под внутренним давлением	301
Тест 7 Тор под внутренним давлением	302
Тест 8 Цилиндрическая оболочка под собственным весом	303
Тест 9 Консольная плита под действием пары сил	304
Тест 10 Параллелепипед под действием собственного веса	305
Тест 11 Чистый изгиб призматического бруса	306
Тест 12 Толстая плита	307
Тест 13 Жесткая балка на подвесках	308

Тест 14 Железобетонная плита перекрытия под распределенной нагрузкой	309
Тест 15 Железобетонная балка под распределенной нагрузкой	310
Тест 16 Стальной канат с заданной стрелой провеса	311
Тест 17 Нить с разновысокими опорами	312
Тест 18 Стальной канат с заданной начальной длиной	313
Тест 19 Вантовая сеть	314
Тест 20 Вантовая ферма.	315
Тест 21 Сильный изгиб консоли	316
Тест 22 Закритический изгиб консоли	317
Тест 23 Закритический изгиб шарнирно опертого стержня	318
Тест 24 Консольный стержень на односторонних опорах	319
Тест 25 Система с односторонними пружинами	320
Тест 26 Круглая плита на одностороннем упругом основании	321
Тест 27 Контактная задача для цилиндра	322
Тест 28 Квадратная плита на одностороннем жестком основании	323
Тест 29 Динамическая односторонняя контактная задача для квадратной пластины	324
Тест 30 Стержень на упругом основании	325
Тест 31 Устойчивость оболочки	326
Тест 32 Устойчивость консоли	327
Тест 33 Устойчивость равномерно нагруженной консоли	328
Тест 34 Устойчивость плоской формы изгиба консоли	329
Тест 35 Устойчивость плоской формы изгиба шарнирно опертой балки	330
Тест 36 Устойчивость при кручении	331
Тест 37 Устойчивость стержня с жесткими вставками	332
Тест 38 Балка переменного сечения	333
Тест 39 Тонкая плита	334
Тест 40 Шарнирно опертая прямоугольная плита	335
Тест 41 Цилиндрическая оболочка	336
Тест 42 Задача Ховгаарда	337
Тест 43 Определение геометрических характеристик эллипса	338
Тест 44 Определение геометрических характеристик равностороннего треугольника	339
Тест 45 Определение геометрических характеристик полукруга	340
Тест 46 Определение геометрических характеристик тонкостенного сечения двутавра.	341
Тест 47 Определение геометрических характеристик тонкостенного сечения сектора кольца	342
Тест 48 Определение геометрических характеристик тонкостенного полузамкнутого сечения	343

От авторов

Сейчас, когда современные компьютеры, операционные системы и специализированные программные комплексы предоставляет пользователям практически неограниченные возможности расчета и проектирования конструкций, наблюдаются тенденции не только традиционно определять напряженно – деформированное состояние соответствующее фиксированной расчетной схеме, но и осуществлять компьютерное моделирование процессов, связанных с различными стадиями жизненного цикла сооружения.

В предлагаемой книге авторы сделали попытку рассмотреть некоторые вопросы синтеза и анализа компьютерных моделей, опираясь, на более чем сорокалетний опыт разработки и использования программных комплексов семейства ЛИРА, бесценный опыт общения с пользователями, учеными и их трудами.

Конечно, в основе компьютерного моделирования лежат расчетные схемы (одна, несколько, связанная последовательность), поэтому вопросы построения расчетных схем также не обошли внимание авторов.

Много внимания авторы уделили теоретическому обоснованию применяемых методов, так как инструментарий построения компьютерных моделей должен быть безупречен. Этот материал, наряду с разделом о численной реализации методов расчета конструкций, может быть полезен исследователям и разработчикам программных комплексов.

В основном же, по нашему мнению, книга предназначена специалистам, которые избрали синтез и анализ компьютерных моделей своей основной профессией. Сейчас эта профессия становится все более актуальной, почетной и востребованной.

Авторы благодарят весь коллектив разработчиков ПК ЛИРА и ПК МОНОМАХ. В первую очередь В.Е. Боговиса, Е.Б. Стрелецкого, А.В. Горбовца, Ю.Д. Гераймовича, Д.В. Марченко, Ю.В. Гензерского, В.П. Титка, без которых написание книги было бы просто невозможно.

Особая благодарность Е.И. Торбенко и Т.А. Ниловой, которые проделали титанический труд по оформлению текста и окончательной верстке.

Сильное и плодотворное влияние на видение проблемы оказало бесценное общение с замечательными инженерами и учеными современности Ю.П. Назаровым, В.А. Алмазовым, Ю.И. Немчиновым, Л.Г. Дмитриевым, Г.Б. Гильманом, В.А. Марчуком, Б.Г. Хайкиным, М.А. Красносельским, С.Г. Крейном, П.Е. Соболевским, В.Г. Литвиновым.

Мы желаем успеха всем читателям книги и заранее приносим извинения за ошибки и несуразности, которые, безусловно, вам встретятся, несмотря на все наши старания.

А. Городецкий
И. Евзеров

О построении материала книги

В том что, уделяя особое внимание методам синтеза и анализа компьютерных моделей, все же необходимо достаточно подробно остановиться на изложении теоретических основ метода конечных элементов авторы не сомневались с самого начала. Сомнения были в другом, как это сделать. С одной стороны, книга в основном ориентирована на инженеров знающих основы строительной механики, чувствующих физику явлений, с другой стороны, очень хотелось изложить основы МКЭ в строгой математической форме, что бы не упустить такие важные вопросы, как сходимости, оценка приближенного решения и др., для таких сложных физически и геометрически нелинейных задач, задач нелинейной динамики и т.п.

Изложение обеих этих позиций в одном разделе было бы достаточно эклектичным и могло даже отпугнуть инженера сложностью изложения, а у математика вызвать неудовольствие многочисленными рассуждениями о физическом смысле. Поэтому авторы приняли решение о разделении этого материала.

Итак, построение материала книги выглядит следующим образом.

В первом разделе рассматриваются проблемы компьютерного моделирования. Красной нитью изложения проходит тезис, расчет – это способ рассуждения, а результаты компьютерного моделирования – это информация для такого рассуждения.

Во втором разделе излагаются теоретические основы МКЭ. Авторы старались это сделать с максимальным приближением к инженерному мышлению. Изложение таких проблем как выбор базисных функций, исследование конечных элементов, применение МКЭ для решения линейных и нелинейных задач по возможности сопровождаются несложными примерами на простейших системах типа сжато-растянутого стержня, консольного стержня, изгибаемого стержня на двух опорах и т.п. каждое рассмотрение того или иного вопроса по возможности снабжается физическим смыслом.

В третьем разделе приводятся приемы численной реализации методов решения задач механики. Авторов здесь также одолевали сомнения в необходимости приведения такого материала. Однако соображения об его полезности для разработчиков программных комплексов и о том, что пользователю при компьютерном моделировании полезно иметь представление об устройстве инструментария, склонили авторов к необходимости публикации такого рода материала. Вместе с тем были предприняты старания для придания ему максимальной компактности, тем более, что все программные комплексы семейства ЛИРА всегда снабжаются инструктивными материалами, где этим вопросам уделяется

достаточное внимание. Кстати в этих же материалах особое внимание уделяется вопросам построения расчетных схем и компьютерных моделей.

Четвертый раздел посвящен именно этим вопросам. Приводятся различные приемы и примеры компьютерного моделирования. Конечно, ни о какой полноте говорить не приходится, так как область практически не ограничена. Авторы постарались представить примеры компьютерного моделирования как достаточно сложных конструкций (геометрически нелинейные вантовые системы и мембраны, контактные задачи и т.п.), так и достаточно востребованных в настоящее время конструкций (плиты подпертые ребрами, конструкции высотных зданий). Авторы не обошли вниманием и вопросы компьютерного моделирования процессов связанных с жизненным циклом конструкций (процессы возведения, процессы нагружения). Безусловно, в дальнейших изданиях этот материал будет расширяться, а может быть оформляться в виде отдельных публикаций. Примером расширения этого материала служит недавно вышедшая книга «Расчет и проектирование конструкций высотных зданий из монолитного железобетона» (Киев, Факт, 2004, www.lira.com.ua).

Книга имеет два очень обширных приложения.

В приложении 1 приводятся математические основы МКЭ. В какой то мере это альтернатива второму разделу и об этом говорилось вначале. Помещение этого материала в приложении объясняется тем, что круг специалистов, заинтересованных в таком материале будет не так обширен. Вместе с тем авторы предполагают, что и для инженеров-практиков наличие такого материала полезно, так как придает им уверенность в том, что применяемые ими методы строго обоснованы. Во всяком случае, они всегда могут в этом убедиться, заглянув в это приложение.

В приложении 2 приведен набор верификационных тестов. Тесты имеют различную сложность: от простых задач линейной статики и динамики до сложных физически и геометрически нелинейных задач, задач с односторонними связями, задач устойчивости и нелинейной динамики. Этот материал может быть полезен при верификации программных комплексов, как их разработчиками, так и специалистами, проводящими сертификацию. Пользователи могут применить этот материал, чтобы убедиться в соответствии возможностей программного комплекса декларациям их разработчиков.

Предисловие

Вся история строительной механики в докомпьютерный период изобиловала приемами, ориентированными на численную реализацию той или иной расчетной схемы. Методы моментных и угловых фокусных отношений, метод Кросса, метод перераспределения начальных угловых деформаций, метод упругого центра и другие приемы – вот небольшой перечень из огромного ряда существовавших в то время приемов и методов расчета конструкций, которые, по сути, сводились к стремлению избежать большого количества вычислений. И когда специалист составлял расчетную схему, он, прежде всего, думал о возможности решения задачи в такой постановке.

Положение в корне изменилось с появлением компьютеров, а затем и метода конечных элементов. Первые практически сняли проблему объема вычислений, метод же конечных элементов, по сути, с одной стороны, примирил и взаимно обогатил методы теории упругости и методы строительной механики стержневых систем, с другой стороны, заменил дискретизацию дифференциальных уравнений (метод конечных разностей) или функционала потенциальной энергии (вариационно-разностные методы) непосредственно дискретизацией расчетной схемы.

Таким образом, можно говорить, что в конце 50-х начале 60-х годов в строительной механике произошла тихая революция, связанная с отказом от многочисленных узко ориентированных приемов строительной механики. Произошел перенос центра тяжести в фундаментальные исследования методов механики твердого тела и математической физики, а в инженерной практике – на приемы и методы построения компьютерных моделей. Это было достаточно быстро осознано специалистами, работавшими в области применения компьютеров при расчетах конструкций. Так, разработчики семейства программных комплексов ЛИРА, уже в 60-х (программные комплексы РПСС, ЭКСПРЕСС, МИРАЖ) в инструктивных материалах большое внимание уделяли рекомендациям по составлению расчетных схем. В последнее время появляется большое количество работ, посвященных синтезу и анализу расчетных схем, но именно расчетных схем, применение которых, по сути, решает одну задачу – нахождение компонентов напряженно-деформированного состояния фиксированной расчетной схемы под заданную нагрузку. Вместе с тем, непрерывно увеличивающаяся мощность современных технических платформ (быстродействие, память), современные возможности операционных сред и современные методы строительной механики (метод конечных элементов, учет физической и геометрической нелинейности) позволяют учесть конструктивные особенности сооружения и реологические свойства материала непосредственно в дискретной расчетной схеме, что открывает поистине неограниченные возможности в компьютерном моделировании.

Компьютерные модели позволяют ставить и решать значительно более широкие задачи (по сравнению с возможностями расчетных схем), связанные с моделированием процессов:

- моделирование процесса нагружения;
- моделирование процесса возведения;
- моделирование процессов «приспособляемости».

На их основе возможно моделирование всего «жизненного цикла» сооружения.

В ряде случаев (их количество интенсивно расширяется) компьютерные модели вытесняют испытание натурных образцов или подсказывают экспериментатору где, как и что надо выявить в результате натурального эксперимента. Например, имеются работы по моделированию заделки арматурного стержня в бетонном массиве (раньше это была исключительно прерогатива натурных испытаний). Очень распространено компьютерное моделирование узлов мостовых конструкций. Список таких примеров, конечно, может быть продолжен.

Небольшое отступление.

Группа сопровождения программного комплекса для расчета и проектирования конструкций «ЛИРА» ежедневно выполняет несколько десятков консультаций на запросы пользователей, поступающих по телефону, электронной или факсимильной связи, на основе функционирования LIRA Online или при личной встрече. В 2003 году поступил запрос для консультации по достаточно сложной схеме. На просьбу группы сопровождения прислать компьютерную модель для изучения проблемы и оказания консультации последовал отказ. В качестве аргумента было сообщено: компьютерная модель – это наше «ноу хау». Можно считать этот случай рядовым, а можно считать его знаковым: составление компьютерных моделей становится искусством и специалисты, их составляющие, дорожат примененными приемами и находками, не желая в ряде случаев делать их всеобщим достоянием.

В этой книге авторы, не следуя примеру вышеназванных специалистов, не делая никаких секретов и опираясь на свой более чем сорокалетний опыт разработки программных комплексов, их сопровождения, расчетов и проектирования сложных конструкций, общения с профессионалами в области строительной механики и математической физики изложили свое видение проблемы синтеза и анализа компьютерных моделей конструкций, что и определило название книги.

Глава 1 Проблемы компьютерного моделирования

1.1 Путь к компьютерным моделям Ретроспектива. Возможное развитие

Когда в конце 50-х годов ЭВМ стали доступны гражданским инженерам, первыми, кто оценил перспективу их применения в практике проектирования конструкций, были инженеры-расчетчики. Это было вполне естественно, так как именно они в первую очередь страдали от необходимости производить большое количество вычислений. Их многочисленные попытки уйти от этой проблемы, используя приближенные методы, упрощенные расчетные схемы, гипотезы, допущения и другие способы, хорошо отображены в сборнике статей [1.1] – «Строительная механика в СССР 1917 – 1957» под редакцией И.М. Рабиновича, в котором, по сути, подведен итог развития строительной механики в докомпьютерный период.

Первой процедурой, которая была реализована на ЭВМ того периода, было, конечно, решение систем линейных уравнений. Эта процедура, с одной стороны, лежит в основе практически всех численных методов, с другой стороны, сравнительно проста в реализации (так, по крайней мере, тогда это казалось) и связана с большим количеством вычислений.

Небольшое отступление.

В 50-е годы делались попытки решать системы линейных уравнений прямым методом исключений (Гаусса) на клавишных автоматах. Решение системы уравнений двадцатого порядка на клавишных автоматах занимало 5–6 дней. Попытки превзойти этот предел даже для опытного оператора клавишных автоматов с применением хорошо организованной последовательности вычислений с многочисленными перекрестными проверками [1.2] оканчивалось неудачей – человек ошибался, и это все время отодвигало достижение цели. Поэтому, на семинаре в Харькове в 1959 году Р.А. Резников – один из пионеров применения ЭВМ в расчетах конструкций – в своем сообщении заявил, что разработан и реализован алгоритм метода Гаусса для решения систем уравнений. Система 30 неизвестных решается на ЭВМ за 4 минуты и проблема решения систем линейных уравнений. Это произвело огромное впечатление. Была продемонстрирована мощь ЭВМ – больших арифмометров (тогда ЭВМ воспринимались только как вычислители, отсюда и их название – электронные вычислительные машины). Но как ошибался Р.А. Резников. Проблема решения систем линейных уравнений занимает ученых и по сей день. Ленточный, окаймленный, небоскрежный методы, метод исключений, фронтальный метод, метод суперэлементов – вот неполный перечень приемов решения этой проблемы. Пути совершенствования решения любой проблемы, даже кажущейся на первый взгляд простой, бесконечны.

Затем было быстро осознано, что возможность решения на ЭВМ систем линейных уравнений вызывает другие проблемы. Составление больших систем и дальнейшая обработка их решений – вычисление параметров напряженно-деформированного состояния – оказалось также

очень трудоемким. Эти процедуры также были реализованы. Реализация других этапов расчета (расчетные сочетания усилий, расчетные сочетания нагрузжений, конструирующие подсистемы и др.) и их интеграция внутри программных комплексов продолжается и в настоящее время.

В начале 60-х годов образовалось несколько школ, каждая из которых избрала свой путь решения проблемы расчета конструкций: московская школа Р.А. Резникова (Л.С. Якобсон, А.М. Горлов, В.С. Лавитман), киевская школа Д.В. Вайнберг, (А.Л. Синявский, А.С. Сахаров, В.Н. Кислоокый, Е.С. Дехтерюк), киевская школа П.М. Сосиса (Л.Г. Дмитриев, Г.Б. Гильман, И.Д. Гликин, А.С. Городецкий).

Школа Р.А. Резникова первой начала создавать программы, которые автоматизировали составление и решение уравнений, а также вычисление усилий и перемещений [1.3, 1.4]. Разработанные в этом коллективе программы СИДР и МАРСС были основными инструментами в практике расчета конструкций в начале 60-х годов. Здесь была отдана дань традициям, и был реализован метод сил как основной метод докомпьютерной эпохи, так как этот метод охватывал возможности различных ухищрений с целью сокращения количества вычислений (многочисленные варианты расчетных схем, метод упругого центра и др.). Вскоре выяснилось, что метод сил является неперспективным ввиду трудностей алгоритмизации построения расчетных схем, и в дальнейшем от него пришлось отказаться. Это был первый пример, когда новая технология расчета конструкций, связанная с применением ЭВМ, существенно повлияла на выбор подходов и методов строительной механики.

Киевская школа Д.В. Вайнберга разрабатывала вариационно–разностные методы решения задач пластин и оболочек [1.5]. Разработанная в этом коллективе программа «ПРОЧНОСТЬ» широко использовалась в исследованиях строительных и машиностроительных конструкций.

Разработки Киевской школой П.М. Сосиса [1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10] опирались на такие основные представления:

- метод перемещений, как наиболее удобный для алгоритмизации;
- дискретизация непосредственно пластинчатых систем на основе стержневых аппроксимаций;
- шаговый метод для решения нелинейных задач.

По сути, эти концепции лежат в основе всех современных программных комплексов, с той лишь разницей, что дискретизация пластинчатых и массивных тел производится на основе более плодотворных идей метода конечных элементов.

Появление ЭВМ обусловило интенсивную разработку численных методов, которые, так или иначе, основывались на дискретизации дифференциальных уравнений (метод сеток), функционала потенциальной энергии (вариационно–разностные методы) и непосредственно расчетных

схем. Поначалу предпочтение отдавалось разностным методам, тем более что они были хорошо разработаны в докомпьютерный период, например работы П.М. Варвака [1.11], а также множество работ, посвященных реализации методов Ритца и Галеркина. Однако все большее внимание ученых привлекали возможности непосредственной дискретизации расчетных схем. Здесь также довели определенные традиции – хорошо разработанные методы строительной механики стержневых систем и уже имеющиеся удачные реализации их на ЭВМ заинтересовали многих ученых возможностью расчета пластинчатых и трехмерных систем на основе стержневых аппроксимаций [1.7, 1.8, 1.12, 1.13]. Настоящую революцию в строительной механике и теории упругости, значение которой в полной мере осознается только сейчас, произвело появление метода конечных элементов (МКЭ). Это объясняется тем, что МКЭ, с одной стороны, использует строгие математические обоснования методов теории упругости и математической физики, с другой стороны, открывает неограниченные возможности компьютерного моделирования, основанные на непосредственной дискретизации расчетных схем. МКЭ «примирил» и возможно обогатил методы строительной механики стержневых систем (по сути, подход, основанный на применении матрицы жесткости стержня – прерогатива МКЭ – испокон веков использовался ими) и методы теории упругости. Это дало возможность использовать хорошо разработанные подходы и апробированные для стержневых систем методы и приемы реализации на ЭВМ для расчета пластинчатых и трехмерных систем.

Небольшое отступление.

Термин шарнир и содержательная его сущность сплошь и рядом используется в моделях стержневых систем, сейчас он стал частым гостем и в расчетах пластинчатых систем, где применяется, например, при моделировании цилиндрических шарниров. Ранее в рамках концепций прежней теории упругости, которая ограничивалась построением дифференциальных уравнений и рассмотрением многочисленных, далеко не универсальных приемов их решения, моделирование такого естественного и широко распространенного свойства конструкции было связано с большими трудностями.

Этим объясняется большое количество работ, посвященных МКЭ, которое появилось в середине 60-х и начале 70-х годов прошлого столетия, хотя считается, что первым предложил МКЭ в его современном виде Р. Курант еще в 1943г. [1.14].

В обзорно-аналитической статье [1.15] приводится и анализируется 196 работ, посвященных МКЭ и опубликованных в начале 70-х годов, это, конечно, был не полный перечень. Среди работ того времени следует отметить ранние работы О. Зенкевича [1.16], М. Тернера, Р. Клафа, К. Мартина, Л. Топпа [1.17], а также работы Л.А. Розина [1.18, 1.19] и В.Г. Корнеева [1.20], где было дано математическое обоснование МКЭ.

В 1969 году была разработана одна из первых программ «МИРАЖ» [1.21] на ЭВМ «Минск-22», которая была ориентирована на массовое применение (в дальнейшем такие программы получили название «промышленные»), в которой был реализован МКЭ в его современном виде.

В последующих разработках можно видеть три направления:

- поиски альтернативных МКЭ численных методов;
- совершенствование МКЭ;
- совершенствование программных комплексов, реализующих МКЭ.

Достаточно быстро было осознано, что метод конечных элементов в перемещениях, несмотря на всю свою привлекательность, имеет ряд существенных недостатков. Это в первую очередь пониженная (по сравнению с перемещениями) точность вычисления напряжений и усилий; наличие разрывов значений напряжений и усилий в узлах; не использование граничных условий, выраженных в напряжениях и усилиях. Кроме того, МКЭ свойственны недостатки всех численных методов: необходимость решения систем уравнений больших размеров и связанные с этим проблемы обусловленности; для определения параметров напряженно-деформированного состояния в локальной области необходимо рассчитывать всю конструкцию.

В связи с этим в 70-е – 80-е годы разрабатывались методы, альтернативные МКЭ в перемещениях. В основном это методы, основанные на вариационных формулировках, отличных от функционала в перемещениях:

- *Метод напряжений*, в котором используется функционал дополнительной энергии Кастильяно. Он минимизируется на множестве допустимых напряжений. Допустимые напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия в напряжениях при заданной внешней нагрузке. Основной недостаток этого метода в том, что множество допустимых напряжений зависят от нагрузки. При множестве загрузок это вызывает существенные затруднения.
- *Смешанный метод*, в котором неизвестными являются перемещения и напряжения. Недостатком этого метода является необходимость нахождения седловой точки функционала Рейсснера, следовательно, нет положительной определенности.
- *Гибридные методы*, где неизвестными являются перемещения в узлах и производных (напряжений) на границах элементов.
- Несколько обособленно выглядит *метод граничных интегральных уравнений*. Применение этого метода позволяет выразить значения перемещений внутри области через значения на границе. Задача сводится к интегральному уравнению, которое далее решается МКЭ. недостаток – неприменим для неоднородных областей и сложной

геометрии области. Хотя количество неизвестных и сокращается, но матрица системы уравнений полностью заполнена.

В связи с тем, что действительной альтернативы МКЭ в перемещениях найти не удалось, в настоящее время наблюдается спад в подобных научных разработках, хотя, возможно, действенные альтернативные методы появятся. Значительно более интенсивно развивались направления по разработке новых форм МКЭ в перемещениях и совершенствованию программных комплексов.

Совершенствование МКЭ в основном было связано с разработкой уточненных КЭ с тем, чтобы снизить размерность разрешаемых уравнений, приложению МКЭ к решениям задач динамики, устойчивости, физической и геометрической нелинейности. По неофициальным данным количество работ по МКЭ превышает двенадцать тысяч. Поэтому, имеет смысл перечислить только основные направления:

- Построение уточненных конечных элементов за счет увеличения количества узловых неизвестных и степени аппроксимирующих полиномов. Это направление известно как p -метод, в отличие от традиционного МКЭ – h -метода, при котором уменьшаются размеры элементов.
- Ведутся исследования и по комбинированию h и p -методов – h - p -метод, который состоит в одновременном сгущении сетки и увеличении степени полиномов.
- Метод структурных конечных элементов (МСКЭ), в основном применяется для пластин и оболочек. Конечномерная аппроксимация строится для трехмерной задачи, затем используется дискретный аналог гипотез Кирхгофа.
- Различные методы более точного вычисления напряжений:
- вычисление средних значений напряжений в узле по полученным напряжениям в центрах КЭ, составляющих звезду этого узла.
- метод двух функционалов – построение непрерывных полей напряжений по вычисленным разрывным. Метод основан на минимизации функционала дополнительной работы на множестве непрерывных напряжений, удовлетворяющих статистическим граничным условиям.

Неограниченные возможности реализации компьютерных моделей на основе МКЭ востребовали разработку новых методов математической физики для решения задач динамики, устойчивости, физической и геометрической нелинейности.

Например, для задач динамики перспективна разработка методов прямого интегрирования, позволяющего учитывать реологические свойства материала. Решение задач устойчивости должно быть неразрывно связано с решением задач физической и геометрической нелинейности ($p - \Delta$ метод широко распространенный на Западе и включенный в Еврокод).

Недостаточность и временная проблематичность описания вероятностных процессов нагружения, недостаточные знания о реологических свойствах материала, особенностях сложного и циклического нагружения и мн. др. не должны останавливать разработчиков программных комплексов в последовательном (step by step) продвижении к цели. Например, реализация решения задач физической нелинейности в рамках активного нагружения несмотря на ряд упрощенных гипотез предоставляет специалисту значительно больше информации для размышления (см. раздел 1.3) по сравнению с расчетными схемами основанными на упруго-линейных предположениях.

Риском высказать предположение, что самостоятельная роль таких расчетных схем со временем будет стремительно уменьшаться, и им будет отводиться вспомогательная роль при решении нелинейных задач на основе методов дискретизации.

Что касается совершенствования современных программных комплексов, то здесь главенствующую роль, по-видимому, будут играть принципы интеграции, универсализации и интеллектуализации.

Немного терминологии.

Термины «интеграция», «универсализация», «интеллектуальность», равно как и термины «расчетная схема», «расчетная модель», «промышленная программа», «программный комплекс», «система», «подсистема» и мн. др. являются для обсуждаемой в этой книге области достаточно молодыми (как и сама область) и еще не устоявшимися. Авторы не уделяют этому особого внимания, так как не хотят втягиваться в бесконечный спор о терминах, тем более, что специалист – технократ всегда поймет о чем идет речь.

Рассуждая о возможных направлениях совершенствования программных комплексов, прежде всего, необходимо иметь ввиду, что здесь легко ошибиться, хотя прогнозируемая область достаточно узкая и прозрачная. Так в работе [1.22], посвященной именно прогнозу развития программных комплексов указан ряд прогнозных функций, некоторые из которых были реализованы практически немедленно, некоторые, например, автоматический выбор метода решения, до сих пор не выполнен, и его осуществление в ближайшем будущем не просматривается. Ряд примеров слишком оптимистических и быстро реализованных прогнозов, конечно, может быть продолжен.

Безусловно, можно говорить о том, что основные усилия разработчиков в ближайшем будущем будут направлены на интеллектуализацию программных комплексов. Характерным примером в этом отношении является программный комплекс «МОНОМАХ» [1.23], ориентированный на решение задач расчета и проектирования конструкций высотных зданий. Он обладает многими признаками интеллектуальных систем: язык общения пользователя с компьютером достаточно естественен, пользователь оперирует с такими понятиями как колонна, ригель, плита перекрытия, отверстие в плите или в стене и т.п. Принципы

задания нагрузок предельно упрощены и также естественны – нагрузка по всей области, по произвольному полигону и т.п. Для ветровых и сейсмических воздействий достаточно задать только направление воздействия и район строительства. Комплекс обладает экспертной системой, которая в процессе расчета сообщает пользователю о некорректных приемах решений – недостаточное сечение элемента, пересармирование и т.п.

И, конечно же, программные комплексы будут наращивать возможности компьютерного моделирования процессов возведения, процессов нагружения на всех стадиях эксплуатации, т.е. жизненного цикла конструкций. Революционные преобразования компьютерных технологий в современном проектировании строительных объектов налицо. Все чертежи практически выполняются только на компьютерах, происходит процесс интеграции программных комплексов автоматизирующих различные разделы проекта. По-видимому, в недалеком будущем следует ожидать появления технологий проектирования, основанных на последовательном создании в компьютере «виртуального объекта» во всех подробностях отражающего своего натурального близнеца. В дальнейшем «виртуальный объект» будет документироваться, архивироваться, лежать в основе организации строительства, отражать все изменения своего натурального близнеца в процессе эксплуатации.

1.2 Глубина моделирования

Рассмотрим очень простую конструктивную схему, имеющую, между тем, реальные очертания. Это. однопролетная одноэтажная рама, опирающаяся на фундаментную балку (рис. 1.1 а). Материал конструкций железобетон. Грунтовое основание принято в виде модели Винклера с

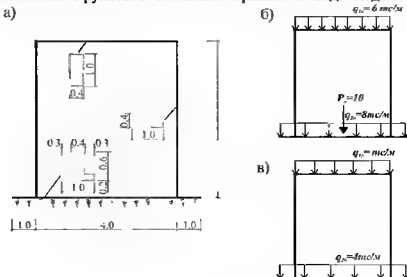


Рис. 1.1

коэффициентом постели $300 \tau_m^3$. На раму действуют два нагружения: постоянное (рис. 1.1 б) и временное (рис. 1.1 в). На рисунке 1.2 показаны эпюры моментов в элементах рамы при различных расчетных предположках.

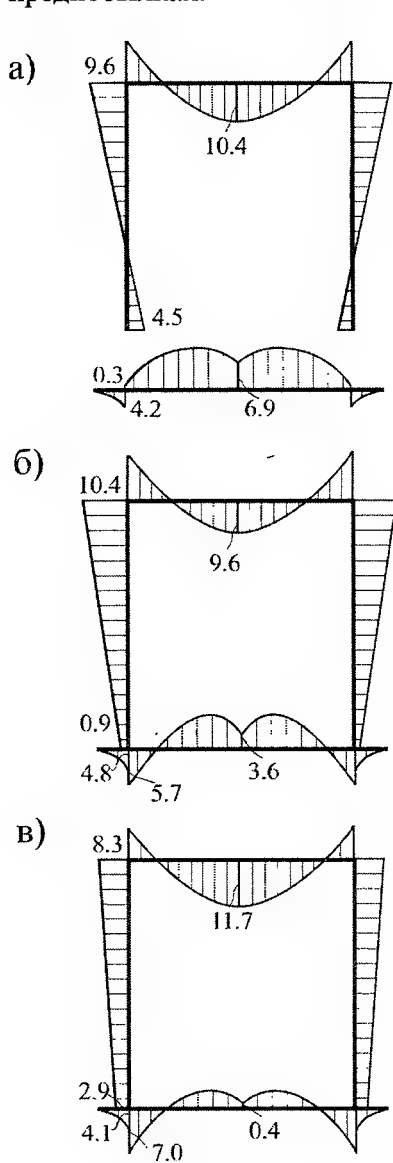


Рис. 1.2

На рис. 1.2 а эпюра моментов соответствует раздельному расчету рамы и фундаментной балки, т.е. сначала была рассчитана рама с жестким защемлением низа стоек, а затем фундаментная балка на собственную нагрузку и силы, соответствующие реакциям в защемлении низа стоек рамы. Такой подход был широко распространен в докомпьютерный период. Специалисты много времени могли обоснованно считать, что они произвели *точный* (!?) расчет, т.к. полученные усилия точно соответствовали принятым расчетным схемам.

На рис. 1.2 б приведена эпюра моментов, соответствующая расчетной схеме, учитывающей совместную работу рамы и фундаментной балки. Здесь уже можно наблюдать некоторые изменения. Наиболее значительное — это изменение величины и знака в нижнем сечении стойки, а также уменьшение величины моментов в фундаментной балке. Это известный эффект, обусловленный совместной работой фундаментных и надземных конструкций (подробно он будет исследован в разделах 4.9 и 4.11) Расчет по такой схеме характерен для настоящего времени, когда современные программные комплексы позволяют исследовать расчетные схемы с большим количеством элементов и узлов, и, следовательно, учитывать эффекты совместной работы всех элементов конструкций.

На рис. 1.2 в показана эпюра моментов, отражающая последовательность возведения конструкции: сначала рассматривается фундаментная балка с постоянной нагрузкой P_n и q_{2n} (рис. 1.2 б), затем рассматривается фундаментная балка совместно с рамой и прикладывается нагрузка q_{1n} (рис. 1.2 б), а затем уже на всю конструкцию прикладывается временная нагрузка (рис. 1.2 в). На каждом этапе полученные усилия

замораживаются и суммируются с усилиями, полученными для следующей схемы. Здесь изменения более чем значительны. Так, например, момент в середине фундаментной балки изменил величину и знак, и, вообще, схема работы фундаментной балки полностью изменилась, по сравнению с первыми двумя. Изменилась и схема работы стоек.

Можно говорить о том, что последняя эпюра моментов получена на основе компьютерного моделирования, т.к. схема (рис. 1.2 в) получена на основе моделирования процесса возведения*. Рассматривая приведенные подходы в исследовании этой простейшей конструктивной схемы, можно говорить о том, что все расчетные схемы и полученные результаты *правильные (!?)* с точки зрения правильного отображения заложенных в них предпосылок.

С точки зрения правильного отображения действительной работы конструкции эти «правильные» схемы имеют далеко не одинаковую степень приближения. Даже для приведенного простейшего примера далеко не исчерпаны факторы, которые могли бы приблизить результаты расчета к адекватному отображению действительной работы конструкции. Вместо винклеровской модели можно принять модель упругого полупространства (в данном случае полуплоскости), учесть нелинейную работу грунтового основания (например, по схеме Кулона) и материала конструкции, учесть, что временные нагрузки могут действовать не одновременно и многое другое.

Еще целый пласт возможных расчетных модулей образуется на основе стохастического подхода. С большой степенью вероятности (уже это часто встречающееся сочетание слов свидетельствует о том, что мы живем в вероятностном мире и при решении многих проблем возможен вероятностный подход) можно говорить, что все используемые в настоящее время расчетные схемы и компьютерные модели конструкций (в том числе и рассмотренные выше) основаны на детерминистическом подходе. Это означает, что геометрия конструкции, характеристики материала, нагрузки и др. описываются фиксированными величинами.

В рамках стохастического подхода, который во многом может показаться более естественным, чем детерминистический, параметры описывающие геометрию конструкции и характеристики материала являются случайными величинами, а описания нагрузок, особенно таких как ветровые или сейсмические, выполняется на основе случайных (в общем случае нестационарных) процессов. Эта ситуация всегда была в поле зрения ученых [1.24, 1.25]. Одним из аргументов перехода в 60-х годах от единого коэффициента запаса к набору повышающих (перегрузки) или понижающих (условия работы для материала) коэффициентов. Такая замена, по мнению авторов такого подхода, создавала предпосылки для

* Все многочисленные результаты расчетов и компьютерного моделирования, приведенные в этой книге, получены на основе программного комплекса «ЛИРА».

более удобного внесения поправок в эти коэффициенты на основании дальнейших исследований вероятностных свойств нагрузок и материала. В последнее время коэффициенты перегрузки заменили коэффициентами надежности. В 60-х – 70-х годах наблюдался некоторый всплеск исследований в области вероятностного подхода [1.26, 1.27, 1.28]. В характерной для того периода работе [1.29] рассматривалась возможность определения вероятности разрушения для достаточно сложных конструкций (статически неопределимая ферма с учетом физической нелинейности). Характеристики материала и нагрузок задавались гистограммы для случайных величин, хотя рассматривалась возможность и задания нагрузок как случайных стационарных процессов. В основу решения задачи был положен метод стохастических испытаний [1.30], для которых использовался метод Монте-Карло с различными модификациями (метод выделения главного объема, метод стратификаций, метод антикоррелированных выборок). По сути, в этой статье было продемонстрировано, что методы компьютерного моделирования во многом решают проблему численной реализации вероятностного подхода.

Несмотря на то, что с тех пор мощность компьютеров резко возросла и в какой-то степени можно говорить, что численная реализация вероятностного подхода может стать доступной в конкретных расчетах, этот подход остается уделом научных исследований. Это объясняется неподготовленностью нормативной базы и слабым статистическим материалом, характеризующим вероятностные свойства конструктивных схем и нагрузок. Поэтому инженерная практика расчета и проектирования конструкций осталась на прежних детерминистических позициях, а в ряде областей (мостовые конструкции) до сих пор использует подходы, основанные на коэффициенте запаса. Это объясняется, с одной стороны устоявшимся, хорошо разработанным аппаратом, основанным на детерминистическом подходе, с другой стороны сложностью изучения вероятностных свойств нагрузок и материала с выработкой практических рекомендаций, а также удобного инженерного аппарата учета этих свойств в практических расчетах. Хотя, безусловно, детерминистический подход определения параметров напряженно-деформированного состояния и сравнение их с допустимыми является менее естественным, чем определение количества отказов (разрушения конструкции) в заданный период времени и сравнение его с количеством допустимых отказов.

Конечно, ряд возможных расчетных моделей может быть продолжен. И в этой ситуации как быть специалисту при выполнении конкретного расчета, когда он должен выдать решения для дальнейшего конструирования? Как разобраться в этом огромном количестве расчетных схем и моделей? Рассуждения на эту тему будут продолжены в следующем разделе.

1.3 Расчет – это способ рассуждения

В предыдущем разделе показано, что даже для простой конструкции (П – образной рамы, что может быть проще) возможно большое количество компьютерных моделей, на основе которых полученные параметры напряженно – деформированного состояния могут значительно отличаться. Причем рассматривалась только стержневая система, для которой имеется возможность получить точное решение (в смысле решения дифференциальных уравнений). Для пластинчатых и массивных конструкций решения на основе метода конечных элементов являются приближенными, и это порождает еще один практически неограниченный ряд возможных компьютерных моделей, обусловленный применением различных типов конечных элементов (различные геометрические формы, аппроксимирующие функции, степени свободы) и различных видов расчетной сетки (различный шаг, равномерная, неравномерная сетка). Применение различных конечно-элементных моделей также может давать различные результаты. Как разобраться специалисту в этом лабиринте возможных компьютерных моделей, когда ему необходимо ответить на конкретный вопрос: как запроектировать конструкцию, чтобы с одной стороны была достаточно экономичной, а с другой стороны обладала необходимой надежностью.

Ответ на этот, казалось бы, сложный вопрос, может оказаться неожиданно простым: расчет – это способ рассуждения. А результаты расчетов и исследований, полученные на основе различных компьютерных моделей – это информация для такого рассуждения.

Небольшое отступление.

Лев Гумилевский в книге «Русские инженеры» писал: «В старину на Руси строители городов, укреплений, мостов, плотин – все те, кого сегодня назвали бы инженерами, назывались размыслами. Размысл обязан был размыслить задачу, опираясь не только на собственный опыт, но и на весь опыт, накопленный его предшественниками, на свой ум, изобретательность...», и на информацию, которую предоставляет компьютерное моделирование, – добавил бы автор этой книги, если бы жил в наше время.

Такой простой ответ для определенного круга специалистов, особенно для инженеров, мировоззрение которых формировалось в докомпьютерный период, может оказаться слишком упрощенным. Ведь раньше все было гораздо проще: точно рассчитывалась рама, точно рассчитывалась балка; если схема была сложнее, то принималась одна или несколько упрощенных схем, которые можно было решить точно. СНИП также как будто давал ответы на все вопросы, которые неукоснительно соблюдались. Почему сейчас, когда казалось компьютеры должны облегчить работу инженера ситуация на первый взгляд оказалась усложненной.

Конечно, при анализе этой ситуации имеется много аспектов.

Во-первых, и раньше многие инженеры относились к расчету как к способу рассуждения. Просто для этих рассуждений было меньше информации, поэтому требовалось больше интуиции и опыта. Естественно, что недостаток информации часто компенсировался большими запасами.

Во-вторых, появление компьютеров позволило учитывать в повседневной деятельности инженеров многие факторы (учет геометрической и физической нелинейности, монтаж и многое другое), которые ранее были уделом только научных исследований.

В-третьих, несколько изменились взгляды на СНиП. СНиП и раньше допускал возможность отступления от установленных правил. Например, при обоснованном расчете допускалось увеличивать размеры температурных блоков. Допускались и определенные алогизмы: расчет сооружения допускался в линейной постановке, а расчет сечений железобетонных элементов необходимо было выполнять в стадии предельного равновесия, которое основывается на нелинейной работе материала. И это естественно, так как нельзя все предусмотреть, нельзя заранее дать ответ на все вопросы. Поэтому вполне логично относиться к строительным нормам и правилам как к рекомендательному материалу. В Западной Европе Еврокод носит рекомендательный характер. В России принят закон о техническом регулировании, где говорится о необязательности соблюдения СНиПа. Все это также осложняет жизнь инженера, ведь свобода выбора – это тяжкое бремя. Рискнем высказать достаточно крамольную мысль (надеемся, что она будет неприемлемой только для небольшой части специалистов), что тенденции отхода от диктата строительных норм и правил в дальнейшем будут усиливаться.

Небольшое отступление.

В предисловии к вышедшей в 2003 году книге М.М. Корнеева «Стальные мосты», выдающийся мостовик современности Г.Б. Фукс говорит: «Стальные мосты» представляет собой оригинальную работу, рассчитанную на инженера, который не удовлетворяется в своей повседневной работе формальным соблюдением норм... Основным инструментом обеспечения надежности проектируемых конструкций будет становиться компьютерное моделирование, на основе которого проектант будет получать необходимую ему информацию. Осмысление и обобщение этой информации будет лежать в основе проектируемых конструкций».

Современные компьютерные программы совершенствуются и в направлении облегчения выбора – встроенные экспертные системы, графический анализ результатов, сравнение результатов по различным расчетным схемам, выдача информации о тенденциях изменения свойств системы на основе коэффициентов чувствительности и многое другое.

Весь материал этой книги служит рассмотрению рекомендаций для такого выбора, однако, пока окончательный выбор на основе рассуждений – это прерогатива инженера.

Небольшое отступление, подтверждающее плодотворность рассуждений на основе компьютерного моделирования.

Случай из жизни.

В начале 80-х на построенном здании пансионата «Дружба» в Крыму обнаружился трещины и автор проекта был вызван в Крым, так как ситуация некоторыми специалистами была расценена как аварийная. Конструкция представляла собой криволинейную стену, покоящуюся на трех опорах и связанную со сложной системой перекрытий, отверстий, балконов, лоджий, эркеров. В процессе проектирования производились подробные расчеты, в том числе и компьютерное моделирование процесса нагружения конструкции с учетом реологических свойств железобетона. Компьютерное моделирование проводилось на основе ПК ЛИРА, функционирующем тогда на ЕС ЭВМ. При выезде на объект было обнаружено совпадение компьютерной картины расположения трещин с действительной. Затем на основе компьютерного моделирования, которое выявило дополнительные резервы несущей способности этой сложной конструкции за счет приспособляемости, было определено, что разрушающая нагрузка в четыре раза превышает эксплуатационную. Таким образом, на основе многочисленных компьютерных моделей, построение и анализ которых все время сопровождался рассуждениями о работе этой сложной не имеющей аналогов конструкции, несмотря на опасения многих специалистов, был сделан вывод: конструкция жизнеспособна. Этот вывод был подтвержден временем.

Весьма вероятно, что в ближайшем будущем (вначале для сложных конструкций, не имеющих аналогов) традиционная технология, основанная на линейно-упругом расчете на отдельные нагружения, а затем конструирование на основе расчетных сочетаний усилий будет вытесняться технологией основанной на компьютерном моделировании процессов нагружения, процессов монтажа, поведения конструкции в эксплуатационной стадии. При этом будут сниматься многие несуразности традиционной технологии, например, противоречия между расчетом в упругой стадии и подбором сечений по предельному состоянию, которое снимет компьютерное моделирование с учетом физической нелинейности, а противоречия между расчетом по недеформированной схеме и дальнейшим неестественным учетом гибкости элемента снимет компьютерное моделирование по деформированной схеме и мн. др. Таким образом, информация для размышления будет становиться все более полной и адекватной.

1.4 Программные комплексы – инструментарий компьютерного моделирования

Судя по ИНТЕРНЕТу количество программных комплексов реализующих МКЭ измеряется уже сотнями, хотя программные комплексы для массового применения («промышленные» ПК) можно перечислить по пальцам. Их практически полный перечень приведен ниже.

При отборе программных комплексов для сравнения, прежде всего авторы руководствовались его ориентацией на строительную область и на возможность массового применения. С одной стороны это объясняется направленностью материала книги, с другой стороны тем, что среди большого количества представленных в ИНТЕРНЕТЕ программных комплексов реализующих метод конечных элементов в перемещениях, имеется много разработок, выполненных небольшими группами исследователей (в основном это разработки многочисленных лабораторий американских университетов) и ориентированных на решение узкой научной проблемы, например, проблемы магнитостатики или электромагнетизма переменного тока и т.п.

Табл. 1.1

Наименование программного комплекса	Сайт	Полнота БКЭ	Суперэлементы	Физическая нелинейность	Геометрическая нелинейность	Конструирующая система		Монтаж
						Железо-бетон	Металл	
STAAD	www.staadpro.co.uk	+	–	+	+	+	+	–
STRAP	www.atir.com	+	–	–	–	+	+	–
COSAR	www.femcos.com	+	–	+	–	–	–	–
NASTRAN	www.NENastran.com	+	+	+	+	–	–	–
STRUDL	www.gtstrudl.gatech.edu	+	+	+	+	+	+	–
ANSYS	www.ansys.com	+	+	+	+	–	–	+
LUSAS	www.lusas.com	+	–	–	–	–	–	–
ROBOT	robot-structures.com/fr/	+	–	–	–	+	+	–
CADFEM	www.cadfem.com	+	–	+	+	–	–	–
ADINA	www.adina.com	+	–	+	–	–	–	–
DIANA	www.diana.tno.nl	+	–	+	+	+	+	–
SOLVIA	www.solvias.se	+	–	+	+	–	–	–
LISA	www.lisa-fet.com	+	–	+	+	–	–	–
MARC	www.marc.com	+	–	+	+	–	–	–
COSMOS	www.cosmosm.com	+	+	+	+	+	+	–
STARK	www.eurosoft.ru	+	+	–	+	+	+	–
ЛИРА	www.lira.com.ua	+	+	+	+	+	+	+

Поэтому авторы стремились представить в таблице только те комплексы, которые могут представлять интерес для специалиста, профессионала, деятельность которого лежит в области расчета и проектирования строительных конструкций.

Этим объясняется состав граф таблицы, которые кроме наименования программного комплекса и адреса сайта, содержат следующую информацию:

- «Полнота библиотеки конечных элементов» – для универсального программного комплекса очень важно, чтобы класс решаемых задач (стержневые системы, комбинированные системы, солид тела) был достаточно представительным.
- «Суперэлементы» – реализация суперэлементного подхода в настоящее время имеет большое значение, в связи с тем, что, как правило, для современных объектов строительства (большепролётные покрытия, высотные здания и т.п.) используется большеэлементная модель. Так как практически во всех программных комплексах для решения систем линейных уравнений используется метод исключений (Гаусса) и его многочисленные модификации (фронтальный метод, метод Халецкого, метод небоскрёбов, ленточный метод), то количество решаемых уравнений, как правило, ограничивается 200-300 тысячами неизвестных (из-за ухудшения обусловленности матрицы при увеличении количества неизвестных) и суперэлементный подход во многих случаях преодолевает эту проблему.
- «Физическая и геометрическая нелинейность» – эта характеристика программного комплекса также очень важна, так как компьютерное моделирование строительных объектов, не имеющих аналогов, обуславливает применение моделей максимально приближенных к действительной работе материала (трещинообразование и ползучесть бетона, существенное изменение геометрии под нагрузкой для таких конструкций как вантовые покрытия, мембраны, тонкостенные бункеры силоса и т.п.).
- «Конструирующие системы – железобетон и металл» – для проектирования строительных конструкций очень важно, чтобы программный комплекс автоматизировал не только статический и динамический расчет, но и автоматизировал ряд операций, связанных с проектированием железобетонных и стальных конструкций. Если реализация конечно-элементной процедуры в настоящее время уже стала уделом отдельных научных работников или даже студентов, то реализация проектных процедур (подбор и проверка сечений железобетонных и стальных элементов как минимум, и выдача рабочих чертежей как максимум) является уделом аналитиков, имеющих большой опыт проектирования и знающих не только набор

национальных норм, но и специфику проектирования того или иного региона. Поэтому, если известных программных комплексов, реализующих только конечно–элементную процедуру очень много (как уже указывалось больше сотни), то наличие конструирующих подсистем уже является прерогативой очень небольшого количества разработок, которые уже можно сосчитать по пальцам.

- «Монтаж» – наличие этой процедуры в настоящее время вызывает большой интерес у специалистов, так как, процесс возведения сложного сооружения связан с многостадийным изменением конструктивных схем. Причем, каждая стадия возведения может быть определяющей для того или иного конструктивного элемента.

Безусловно, набор сравнительных характеристик недостаточно полон. Так, например, отсутствует такая характеристика, как наличие графической среды пользователя. Авторы подразумевают, что такая среда должна присутствовать в каждом программном комплексе, в противном случае он просто не пригоден для применения.

Анализируя таблицу можно ещё сузить список программных комплексов, с которыми специалисту имеет смысл ознакомиться с целью выбора наиболее приемлемого для своей профессиональной деятельности. Этот список может выглядеть так (в скобках указана строка, в которой базируются разработчики): STRAP (Израиль), STAAD, NACSTRAN, STRUDL, ANSYS, COSMOS, ADINA (США), DIANA (Голландия), ROBOT (Франция), STARK (Россия), LIRA (Украина).

Для специалиста, занимающегося непосредственно проектированием строительных объектов, безусловно, предпочтительнее будет программный комплекс, имеющий конструирующие подсистемы, в которых реализованы стандарты и нормы того региона, для которого специалист ведёт проектирование.

Американские программы, имеющие конструирующие подсистемы, в основном реализуют нормы США и Канады. Европейские программы, включая программные комплексы STARK и LIRA, реализуют Еврокод.

В программных комплексах STARK и LIRA реализованы также нормы стран СНГ, поэтому для этого региона именно эти программные комплексы являются наиболее привлекательными.

Литература к главе 1

- 1.1 Строительная механика в СССР 1917-1957.//Сборник статей под редакцией И.М. Рабиновича, М.: Госстройиздат, 1957.
- 1.2 Сосис П.М. Опыт механизации инженерных расчетов на машиносчетной станции.//Строительная механика и расчет сооружений. -М.: Издательство литературы по строительству, 1960, -№ 3.
- 1.3 Резников Р.А. Методы решения задач строительной механики на электронных цифровых машинах.
- 1.4 Резников Р.А., Горлов А.М., Левитман В.С., Якобсон Л.С. и др. Применение ЭЦВМ к расчетам строительных конструкций в практике проектных организаций (опыт института Гипротас).//ЭЦВМ в строительной механике. Труды первого всесоюзного совещания по применению ЭЦВМ в строительной механике (г. Ленинград, 1963г.).-Л.,-М.: Издательство литературы по строительству, 1966.
- 1.5 Вайнберг Д.В., Дехтерюк Е.С., Синявский А.Л. методы спуска в программировании задач строительной механики пластин и оболочек.//ЭЦВМ в строительной механике. Труды первого всесоюзного совещания по применению ЭЦВМ в строительной механике (г. Ленинград, 1963г.).-Л.,-М.: Издательство литературы по строительству, 1966.
- 1.6 Сосис П.М. Статически неопределимые системы. -К.:Будівельник, 1968.
- 1.7 Дмитриев Л.Г. Возможные расчетные стержневые модели некоторых непрерывных систем.//ЭЦВМ в строительной механике. Труды первого всесоюзного совещания по применению ЭЦВМ в строительной механике (г. Ленинград, 1963г.).-Л.,-М.: Издательство литературы по строительству, 1966.
- 1.8 Гильман Г.Б. Расчет тонких упругих пологих оболочек с использованием стержневых аппроксимаций.//Сборник «Применение электронных математических машин в строительной механике», -К.: Наукова думка, 1968.
- 1.9 Городецкий А.С. Вопросы расчета конструкций в упруго-пластической стадии с учетом применения ЭЦВМ.//ЭЦВМ в строительной механике. Труды первого всесоюзного совещания по применению ЭЦВМ в строительной механике (г. Ленинград, 1963г.).-Л.,-М.: Издательство литературы по строительству, 1966.
- 1.10 Городецкий А.С. К расчету тонкостенных железобетонных конструкций в неупругой стадии.//Сборник трудов НИИСК «Строительные конструкции». -К.:Будівельник, 1965. -№3.
- 1.11 Варвак П.М., Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок.//К.: Из-во АН УССР, 1949.

- 1.12 Ржаницын А.Р. Представление сплошного изотропного упругого тела в виде шарнирно-стержневой системы.//Сборник «Исследование по вопросам строительной механики и теории пластичности». -М.: Госстройиздат, 1956.
- 1.13 Городецкий А.С., Гильман Г.Б. О стержневых расчетных схемах тонкостенных железобетонных конструкций.//Строительство и архитектура, 1968, №10.
- 1.14 Courant R., Variable methods for the solution of problems of equilibrium and vibration, Bull. Amer Math. Soc., vol. 49, N1, 1943.
- 1.15 Вайнберг Д.В., Городецкий А.С., Киричевский В.В., Сахаров А.С. Метод конечных элементов в механике деформируемых тел.//К.: Прикладная механика, 1972, т 8, вып. 8. –С. 3-28.
- 1.16 Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K., Finite elements in the solution of field problems, the Engineering, vol. 220, 1965.
- 1.17 Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. -J.: Aeronaut.Sci., 1956, 23 №9, p. 24-239.
- 1.18 Розин Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ.//Метод конечных элементов, -Л.: Энергия, 1971. -213с.
- 1.19 Розин Л.А. Основы метода конечных элементов теории упругости. -Л.: Из-во ЛПИ, 1971. -77с.
- 1.20 Корнеев В.Г. Сопоставление метода конечных элементов с вариационно-разностным методом решения задач теории упругости.//М.: «Известия ВНИИГ», 1967, т 8. –С. 287-307.
- 1.21 Городецкий А.С., Горбовец А.В. «Мираж» – программа для расчета стержневых, пластинчатых и массивных конструкций методом конечных элементов на ЭВМ «МИНСК-22». -К.:Препринт УкрНИИпроект, 1970. -94с.
- 1.22 Городецкий А.С., Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Интеллектуальная программная система – прогноз новых возможностей.//Системы автоматизированного проектирования объектов строительства. -К.: Будівельник, 1989.-С.43-56.
- 1.23 Городецкий Д.А. интеллектуальная программная система для автоматизированного проектирования конструкций из монолитного железобетона. -К.: «Будівництво України», 1997. -№4. -С: 37-41.
- 1.24 Ржаницын А.Р. Определение запаса прочности сооружений.//М.: «Строительная промышленность», 1947.-№8..
- 1.25 Стрелецкий Н.С. Избранные труды. -М.: Стройиздат, 1975.
- 1.26 Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. -М.: Госстройиздат, 1965.
- 1.27 Болотин В.В. Применение методов теории вероятности и теории надежности в расчетах сооружений. -М.: Стройиздат, 1971.

- 1.28 Кузнецов Б.Н. К вопросу об актуальности расчета конструкций на приспособляемость.//Строительная механика и расчет сооружений, 1979. -№5.
- 1.29 Городецкий А.С. О численных методах определения вероятности разрушения конструкций.//Строительная механика и расчет сооружений, 1971. -№3.
- 1.30 Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний. - М.: Физматгиз, 1961.

Глава 2 Основы теории метода конечных элементов. Инженерный подход

Основные условные обозначения:

A	– дифференциальный оператор задачи;
u	– вектор перемещений;
f	– вектор внешних нагрузок;
B	– матрица операций дифференцирования;
D	– матрица упругости;
Ω	– область рассматриваемой задачи;
$I(u)$	– функционал полной потенциальной энергии системы;
Π	– потенциальная энергия деформации;
W	– работа внешних сил;
σ	– вектор напряжений;
ε	– вектор деформаций;
φ	– вектор базисных функций;
q	– вектор узловых неизвестных;
K	– матрица жесткости всей системы;
P	– вектор внешней нагрузки в узлах;
Ω_r	– область r конечного элемента;
K_r	– матрица жесткости r конечного элемента;
HA	– энергетическое пространство задачи;
m	– порядок дифференциального оператора задачи;
K	– матрица коэффициентов канонической системы уравнений МКЭ;
L	– размер матрицы K , общее число узловых неизвестных
$(u^{(x)}, u^{(y)}, u^{(z)})$	– линейные (угловые) перемещения по направлению осей X, Y, Z ;
v, w	– возможное перемещение;
u	– точное решение задачи в перемещениях;
uh	– приближенное решение на сетке h (h – минимальное значение радиуса КЭ);
h	– максимальный размер КЭ;
$a(u, v)$	– возможная работа внутренних сил;
$a'(u, v, w)$	– производная возможной работы внутренних сил по u .

2.1 Основные положения

Метод конечных элементов МКЭ [2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 и мн. др.] рассматривается ниже в форме перемещений, т.е. для случаев, когда искомой разрешающей функцией служит перемещение. Это вызвано тем, что выбор расчетной схемы для МКЭ в перемещениях легко поддается

алгоритмизации, а практическое использование МКЭ немыслимо без применения современных компьютеров.

Уравнения равновесия для задач линейной теории упругости записываются в виде:

$$Au \equiv -B^T(DBu) + f = 0 \quad (2.1)$$

где: B – матричный линейный дифференциальный оператор, с помощью которого вектор деформаций $\varepsilon(u)$ выражается через вектор перемещений u , $\varepsilon(u) = Bu$;

D – матрица упругости, определяющая линейную связь между векторами напряжений σ и деформаций ε , $\sigma = D\varepsilon$ (закон Гука);

B^T – транспонированная матрица.

Обозначим:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (DBu)(Bu) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u) \varepsilon(u) d\Omega \quad - \text{потенциальная энергия}$$

деформации,

$$W(u) = \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega \quad - \text{работа внешних сил;}$$

$$I(u) = \Pi(u) + W(u) \quad - \text{полная энергия} \quad (2.2)$$

Положительная определенность и самосопряженность дифференциального оператора A позволяют перейти от решения дифференциальных уравнений (2.1) к нахождению минимума функционала полной энергии $I(u)$, т.е. функция u , доставляющая минимум функционалу (2.2), является решением дифференциального уравнения (2.1). Функционал полной энергии вида (2.2) является функционалом Лагранжа.

Условием минимума функционала (2.2) являются равенства принципа возможных перемещений: при любом возможном перемещении v сумма возможных работ внутренних и внешних сил равна нулю. Обозначим:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (DBu)(Bv) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma(u) \varepsilon(v) d\Omega \quad - \text{возможную работу}$$

внутренних сил

$$(f, v) = W(v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega \quad - \text{возможную работу внешних сил.}$$

Тогда принцип возможных перемещений запишем в виде:

$$a(u, v) + (f, v) = 0 \quad (2.3)$$

Левая часть равенства (2.3) является, как легко показать, производной функционала полной энергии (2.2).

Задача решения уравнений равновесия (2.1), и вариационная задача минимизации функционала (2.2), т.е. нахождения функции u , удовлетворяющей (2.3), эквивалентны, т.е. имеют одно и то же решение.

Покажем это на простейшем примере сжато растянутого стержня (рис. 2.1).

Обозначим:

E – модуль Юнга;

F – площадь сечения;

l – длина;

$u(x)$ – осевое перемещение;

$v(x)$ – возможное перемещение;

$f(x)$ – внешняя нагрузка

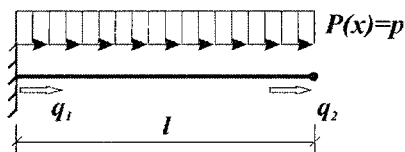


Рис.2.1

Дифференциальное уравнение равновесия, как известно, имеет вид:

$$-\frac{d}{dx}\left(EF\frac{du}{dx}\right) + f(x) = 0, \quad \text{граничные условия: } u(0) = 0, \quad EF\frac{du}{dx}(l) = 0.$$

Домножив уравнение на произвольную функцию $v(x)$, удовлетворяющую граничным условиям и проинтегрировав первое слагаемое по частям, получим:

$$\int_0^l \left[-\frac{d}{dx}\left(EF\frac{du}{dx}\right) + f(x) \right] v(x) dx = \int_0^l EF\frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} dx + \int_0^l f(x)v(x) dx = 0$$

внеинтегральные слагаемые в силу граничных условий равны нулю.

Таким образом, получено равенство принципа возможных перемещений, т.е. сумма возможных работ внутренних и внешних сил на любом возможном перемещении равна нулю.

Самосопряженность и положительная определенность оператора A вида (2.1) в

рассматриваемом случае заключается в очевидном неравенстве $\int_0^l EF\frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} dx \geq 0$ и

$$\text{равенстве } \int_0^l EF\frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} dx = \int_0^l EF\frac{dv}{dx} \cdot \frac{du}{dx} dx$$

Справедливость этого неравенства следует из положительности EF (в общем случае из положительной определенности матрицы D).

Таким образом, показано, что функция u , являющаяся решением дифференциального уравнения равновесия, удовлетворяет принципу возможных перемещений. Теперь покажем, что равенство принципа возможных перемещений является условием минимума функционала потенциальной энергии.

Функционал потенциальной энергии имеет вид:

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^l EF \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \int_0^l f(x)u(x)dx,$$

в точке $x=0$ задано главное граничное условие $u(0)=0$. Минимуму этого функционала соответствует равенство нулю его производной. Если $v(x)$ произвольная функция, удовлетворяющая, как и $u(x)$, главному граничному условию $v(0)=0$, то производная функционала $I(u)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(u + tv) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^l EF \left[\frac{du^2}{dx} + 2t \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + t^2 \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx + \int_0^l f(x)(u + tv)dx \right] \Big|_{t=0} = \\ &= \left[\int_0^l EF \left[\frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + t \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx + \int_0^l f(x)v dx \right] \Big|_{t=0} = \int_0^l EF \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} dx + \int_0^l f(x)v dx = 0 \end{aligned}$$

Далее покажем, что функция $u(x)$, удовлетворяющая принципу возможных перемещений, удовлетворяет дифференциальному уравнению равновесия.

Интегрируя первое слагаемое равенства возможных перемещений по частям, получим:

$$\int_0^l \left[-\frac{d}{dx} \left(EF \frac{du}{dx} \right) v(x) + \int_0^l f(x)v(x) dx \right] dx + \left(EF \frac{du}{dx}(l) \right) v(l) - EF \frac{du}{dx}(0) v(0) = 0$$

Учитывая главное граничное условие $v(0)=0$ и произвольность функции $v(x)$, получаем

уравнение равновесия: $-\frac{d}{dx} \left(EF \frac{du}{dx} \right) + f(x) = 0$ и статическое граничное условие:

$$EF \frac{du}{dx}(l) = 0$$

Аналогичные построения, устанавливающие эквивалентность условия минимума потенциальной энергии, принципа возможных перемещений и дифференциальных уравнений равновесия для всех линейных задач теории упругости приводятся в ряде работ по вариационным методам в математической физике (например, [2.8]) и изложены в Приложении I.

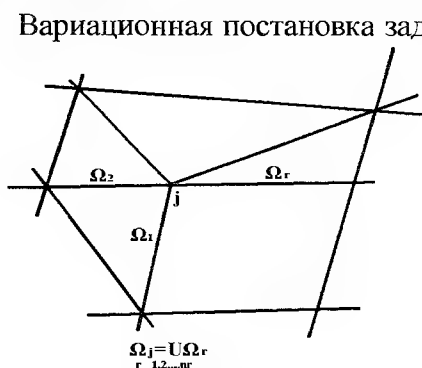


Рис. 2.2

Вариационная постановка задачи имеет определенные преимущества, которые вытекают из того, что порядок производных в (2.2) понижается в 2 раза. Поэтому более удобно формулируются граничные условия, смягчаются требования к базисным функциям и более просто представляются разностные выражения.

Метод конечных элементов вариационный, т. е. является методом нахождения минимума

функционала (2.2), на основе уравнений (2.3). Основная концепция МКЭ заключается в непосредственной дискретизации рассчитываемой системы, которая расчленяется расчетной сеткой на конечные элементы. На полученной дискретной модели вводится система кусочно-непрерывных функций $\{\varphi_l(x)\}$, определенных на конечном числе подобластей - звездах конечных элементов (рис. 2.2), т. е.

$$\varphi_l(x) = \begin{cases} \varphi_{lj}(x) & x \in \Omega_j \\ 0 & x \notin \Omega_j \end{cases}.$$

Искомая функция перемещений по области системы $u(x)$, $x \in \Omega$ приближенно принимается в виде:

$$u_h(x) = \sum_{l=1}^L q_l \varphi_l(x), \quad (2.4)$$

где L - общее число узловых неизвестных, которое в общем случае не равно числу узлов, так как в каждом узле может быть различное число неизвестных.

Узловые неизвестные q_l в МКЭ, как правило, снабжаются физическим смыслом и представляют собой искомые значения перемещений и их производных в узлах расчетной сетки.

Терминология. Спор о терминах всегда бесконечен и при обсуждении той или иной проблемы нужно заранее договориться о них, иначе спор затянется обсуждением основной проблемы. Какой термин выбрать при обозначении функций, аппроксимирующих (интерполирующих) перемещения по области КЭ: аппроксимирующие, координатные, интерполирующие, базисные? Все эти термины в той или иной степени отражают сущность проблемы. Авторы книги (о вкусах не спорят) выбрали термин базисные функции (БФ). То же самое относится и к термину степени свободы - он является наиболее устоявшимся в МКЭ. Однако, по нашему мнению, он очень неудачен, так как заимствован из другой области. Это может приводить к определенным казусам. Так

один известный ученый при описании МКЭ дал такое определение: степень свободы определяет положение точки в пространстве. Такое определение может подходить, например, к кинематике, но никак не подходит к МКЭ. Имеются различные предложения. Например, неизвестные перемещения узлов (но как быть, когда перемещения узлов заданы, т.е. известны) или просто перемещения узлов (но как быть, когда используются не перемещения, а их производные типа $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$). Авторы предлагают термин узловые неизвестные, хотя заранее уверены, что и этот термин будет низвергнут критикой (и наверное справедливой!). Тем не менее в дальнейшем будем использовать аббревиатуры: БФ – базисная функция, УН – узловые неизвестные.

На основе подстановки (2.4) в (2.3) задача определения непрерывной функции $u(x)$ сводится к определению значений конечного числа неизвестных q_l , которые находят из системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_l} I(u_h) &= \frac{d}{dq_l} (\Pi(u_h) - W(u_h)) = \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{1}{2} a(u_h, u_h) - (f, u_h) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{1}{2} a \left(\sum q_l \varphi_l, \sum q_l \varphi_l \right) - (f, \sum q_l u_h) \right) = \\ &= a(u_h, \varphi_l) + (f, \varphi_l) = \sum_{j=1}^L q_j \int_{\Omega} DB \varphi_j B \varphi_l d\Omega + \int_{\Omega} f \varphi_l d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

при $l=1, 2, \dots, L$.

При решении системы (2.5) полагается, что $u_h(x)$ удовлетворяет главным граничным условиям. По найденным из (2.5) значениям q_l на основе (2.4) определяется функция перемещений по области системы, а по ней на основе известных соотношений теории упругости и другие компоненты напряженно-деформированного состояния.

Обозначим:

$$\begin{aligned} k_{l,j} &= \int_{\Omega} (DB \varphi_j) B \varphi_l d\Omega = a(\varphi_j, \varphi_l) \\ P_l &= \int_{\Omega} f \varphi_l d\Omega = (f, \varphi_l) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Матрицу K с элементами K_{lj} называют матрицей жесткости или матрицей системы уравнений МКЭ, вектор P с элементами P_l – вектором нагрузок и вектором правых частей.

Обозначив q – вектор узловых неизвестных, запишем уравнения (2.5) в матричном виде

$$Kq + P = 0 \quad (2.7)$$

В рассмотренном выше примере сжато-растянутого стержня (рис. 2.1) перемещения аппроксимируют в виде (2.4):

$$u_h(x) = q_1 \varphi_1(x) + q_2 \varphi_2(x), \text{ где}$$

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{x}{l}; \quad \varphi_2(x) = \frac{x}{l}; \quad q_1, q_2 - \text{узловые неизвестные, в данном случае}$$

перемещения концов стержня вдоль оси x .

Из главного граничного условия $u_{(0)}=0$ получим, что $q_1=0$, тогда $u_h(x) = q_2 \varphi_2(x)$.

Дискретизированный функционал потенциальной энергии имеет вид:

$$I(u_h) = \frac{1}{2} \int_0^l E q_2^2 \left(\frac{d\varphi_2}{dx} \right)^2 dx + \int_0^l f(x) q_2 \varphi_2(x) dx.$$

Вычислив производную $I(u_h)$ по q_2 и приравняв ее к нулю, получим уравнение МКЭ:

$$\frac{EF}{l} q_2 + \int_0^l f(x) \frac{x}{l} dx = 0$$

При равномерно распределенной нагрузке $f(x)=p$, получим: $\frac{EF}{l} q_2 + \frac{1}{2} Pl = 0$

Это уравнение хорошо известно в строительной механике стержневых систем.

Расчленение системы на конечные элементы, выполненное на первом этапе расчета, дает возможность представить возможные работы деформаций и внешних сил в виде сумм по отдельным элементам:

$$a(u, v) = \sum_r a_r(u, v), \quad (f, v) = \sum_r (f, v)_r$$

Это позволяет составлять элементы матрицы K и вектора P из отдельных компонентов. Так, lj элемент матрицы K и l элемент вектора P определяются по формулам

$$K_{lj} = \sum_{r \in lj} K_{ljr}; \quad P_l = \sum_{r \in l} P_{lr}$$

где $r \in l$, $r \in l$ (у знака суммы) – суммирование по всем элементам, содержащим l и j узловые неизвестные; K_{lr} , P_{lr} – компоненты матрицы жесткости и вектора узловых сил r – конечного элемента, которые определяются аналогично (2.6):

$$K_{lr} = \int_{\Omega_r} (B\varphi_l)^T DB(\varphi_j) d\Omega_r; \quad (2.8)$$

$$P_{lr} = \int_{\Omega_r} \varphi_l^T f d\Omega_r. \quad (2.9)$$

Таким образом, МКЭ дает возможность строить разрешающую систему уравнений (2.5) на основе рассмотрения каждого отдельного конечного элемента, что очень удобно в реализации и является важным достоинством метода.

После выбора системы базисных функций $\{\varphi_l\}$ процедура МКЭ представляется достаточно формализованной. Выбор же $\{\varphi_l\}$ – самый ответственный этап, так как он определяет сходимость метода, точность решения задачи, разрешимость системы (2.5). Мнение о том, что наглядность МКЭ позволяет достаточно просто строить базисные функции из чисто физических соображений, на основе интуиции и т.п., может привести к грубым ошибкам. В настоящее время создан аппарат, позволяющий правильно законструировать или проверить выбранные базисные функции с точки зрения сходимости решения, обусловленности системы (2.5) и других факторов (см. п. 2.2).

Рассмотренная процедура МКЭ характерна для метода перемещений, использующего функционал полной потенциальной энергии системы – функционал Лагранжа. Если в основу решения задачи положен функционал Кастильяно, то такой вариант МКЭ аналогичен методу сил, а если функционал Рейсснера, то смешанному методу. В практической реализации наиболее удобен вариант МКЭ в перемещениях, поэтому дальнейшее изложение ориентировано на применение именно этого метода.

2.2 Выбор базисных функций и узловых неизвестных

Расчленение системы на конечные элементы дает возможность использовать рассмотрение отдельных конечных элементов не только для построения разрешающей системы (2.5), т.е. для практического решения задачи, но и для теоретических исследований базисных функций, абстрагируясь при этом от геометрии рассматриваемой области, граничных условий, нагрузки. Это обуславливает введение понятия «тип конечного элемента», который характеризуется набором узловых неизвестных, видом базисных функций, геометрией области Ω_r , классом решаемых задач (видом оператора A), для которых он предназначен. Базисные функции на r конечном элементе могут быть введены в явном или неявном виде.

В первом случае каждому узловому неизвестному j_r ставится в соответствие j_r базисная функция, т.е. аппроксимация имеет вид:

$$u_h(x) = \sum_{j_r=1}^{nr} q_{j_r} \varphi_{j_r}(x); \quad x \in \Omega_r, \quad (2.10)$$

где nr - общее число степеней свободы относящихся к r конечному элементу с областью Ω_r .

Во втором случае аппроксимация задается степенным полиномом, т.е. в виде

$$u_h(x) = a_{1r} \psi_{1r} + a_{2r} \psi_{2r} + a_{j_r} \psi_{j_r} + \dots + a_{mr} \psi_{mr}; \quad x \in \Omega_r; \quad (2.11)$$

где a_{j_r} и ψ_{j_r} ($j_r=1, 2, \dots, mr$) - коэффициенты и неизвестные базисные функции.

Узловые неизвестные q_{j_r} связаны с коэффициентами a_{j_r} соотношением

$$q_r = V a_r; \quad a_r = V^{-1} q_r.$$

Матрица V строится, как правило, из соображений, что при подстановке в (2.11) координат определенного узла величина u_h должна принимать значение узлового неизвестного q в этом узле. Для однозначного перехода от q_r к a_r и наоборот необходимо, чтобы матрица V была квадратной, т.е. $nr=mr$ и обратимой (свойство унисольвентности). Это достигается за счет варьирования числа членов в (2.11), которое производится с учетом удовлетворения базисными функциями определенных требований. Подробный анализ унисольвентности для распространенных КЭ приведен в работе [2.38].

Тожественность МКЭ и метода Ритца была показана в работах [2.3, 2.5, 2.6]. Взаимосвязь этих методов создает теоретические основы для выбора и оценки базисных функций МКЭ. Так, на основе работы [2.8] можно сформулировать требования, которым должны удовлетворять функции φ_i , чтобы обеспечить сходимость МКЭ:

1) система базисных функций $\{\varphi_i\}$ должна принадлежать энергетическому пространству H_A дифференциального оператора задачи A . Это означает, что наряду с удовлетворением главным граничным условиям, представление разрешающей функции u должно обеспечить существование по всей области Ω тех перемещений и их производных, которые входят в функционал (2.2). Элементы, базисные функции которых удовлетворяют этому условию, называются совместными или конформными;

2) функции φ_i должны быть линейно независимы. Это требование необходимо для разрешимости системы (2.5);

3) система базисных функций $\{\varphi_i\}$ должна быть полна в энергетическом пространстве оператора A . Это означает, что функции (2.4) при неограниченном сгущении сетки могут аппроксимировать в энергетическом смысле любые возможные перемещения по области Ω с любой заранее заданной степенью точности.

Таким образом, теоретическое обоснование функций φ_l может быть сведено к их проверке на удовлетворение перечисленным выше требованиям.

Принадлежность к энергетическому пространству оператора A устанавливается существованием компонентов напряженно-деформированного состояния, которые входят в соответствующий функционал. По области конечных элементов, как правило, это требование удовлетворяется автоматически, поэтому проверять надо неразрывность соответствующих компонентов только по линиям или поверхностям контактов конечных элементов [2.38]. Так, для трехмерного и плоского напряженного состояния дифференциальный оператор A имеет второй порядок, в функционал Лагранжа входят первые производные по перемещениям. Поэтому для их существования необходимо обеспечить непрерывность перемещений по области контактов КЭ. Из тех же соображений при решении задач изгиба плит или оболочек (порядок дифференциального оператора – 4, а в функционал Лагранжа входят вторые производные по перемещениям) необходимо обеспечить непрерывность, как перемещений, так и их первых производных по линиям контактов.

Линейная независимость базисных функций проверяется достаточно легко и, как правило, выполняется для МКЭ автоматически.

Для проверки полноты необходимо установить порядок p полинома, который выражается линейными комбинациями функции φ_{jg} , и в случае $p \geq m$ ($2m$ – порядок дифференциального оператора A) третье требование выполняется. В дальнейшем число p будем называть порядком аппроксимации системы базисных функций. В работе [2.11] получено соотношение, позволяющее определить p для произвольных сеток и наборов степеней свободы в узлах:

$$\sum_{x_j \in \Omega_r} \sum_{g=1}^{g_j} (B_{jg} x^\tau) \varphi_{jg}(x) = x^\tau \quad (2.12)$$

при $\tau \leq p$ и $x \in \Omega_r$,

где x_j – узлы конечного элемента Ω_r ; g_j – число узловых неизвестных в узле j ; φ_{jg} – базисная функция; g_j – количество узловых неизвестных узла x_j ; τ – мультииндекс; B_{jg} – функционал, определяющий значение узлового неизвестного.

Если базисные функции φ_l удовлетворяют всем трем перечисленным выше требованиям, то сходимость МКЭ оценивается аналогично вариационно-разностным методам.

На основе теорем об оценках погрешности интерполяции функций степенными полиномами в работе [2.5] показано, что

$$u - u_{h,A} \leq ch^{p+1/m}, \quad (2.13)$$

где u , u_h – точное и приближенное решения; h – максимальный диаметр элементов; c – константа, измеряющая погрешность, $\|\cdot\|_A$ – норма в энергетическом пространстве.

Из энергетической оценки (2.13) вытекает средняя квадратичная оценка для напряжений, т.е.

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{L_2} \leq ch^{p+1-m}, \quad (2.14)$$

где σ , σ_h – соответственно точное и приближенное значения напряжений.

Используя прием Нитше [2.38], из (2.13) можно получить среднюю квадратичную оценку для перемещений с более высоким порядком сходимости:

$$u - u_h\|_{L_2} \leq ch', \quad (2.15)$$

$$t = 2(p+1-m) \text{ при } p+1 \leq 2m \text{ и } t = p+1 \text{ при } p+1 \geq 2m.$$

В [2.38] и других работах исследуется возможность перехода к оценкам погрешностей в отдельных точках области Ω , это свидетельствует о том, что МКЭ при достаточно высоком порядке аппроксимации p имеет сходимость не только в обобщенном энергетическом смысле, но и для отдельных точек, даже при наличии различных сингулярностей в геометрии, граничных условиях, нагрузке.

Приведенные оценки имеют не только чисто теоретическое значение, но могут оказаться полезными при практических расчетах, например, если интересует вопрос, как далеко полученное приближенное решение отстоит от точного. На основе оценок (2.13) – (2.15) можно примерно оценить абсолютную погрешность для имеющегося приближенного решения, если известны константы c .

В работах [2.11, 2.12] намечены пути их определения для различных классов задач теории упругости. Однако это может оказаться очень трудоемким и несоизмеримо более сложным, чем решение самой задачи. Вместе с тем можно предложить другой путь, заключающийся в том, что на основе двух расчетов с последовательным сгущением сетки (например, в 2 раза), используя оценки (2.13) – (2.15), можно составить примерное представление о точном решении и иметь суждение о расчетной сетке, необходимой для достижения заданной точности (примеры исследования некоторых конечных элементов на основе оценок (2.13) – (2.15) приведены в п. 2.3). Этот прием можно рассматривать как перенесение на МКЭ идеи Ричардсона – для разностных схем, которая обоснована и исследована в работе [2.13].

Существует целый класс так называемых «несовместных» конечных элементов, которые образуются на основе функций ϕ_l , удовлетворяющих второму и третьему требованиям, т. е. линейной независимости и полноты, и не удовлетворяющих первому требованию принадлежности к энергетическому пространству H_A . В связи с этим оценки (2.13) – (2.15)

непригодны для таких элементов и для доказательства сходимости здесь требуются новые приемы. Впервые доказательство сходимости для конкретного несовместного конечного элемента было получено в работе [2.14]. Рассматривался прямоугольный элемент плиты (элемент Клафа) с тремя степенями свободы в узле. При доказательстве существенно использовалась геометрия области (прямоугольная плита) и граничные условия (защемление по контуру). Более общие приемы доказательства сходимости несовместных элементов были получены в работе [2.16] и описаны в приложении 1.

В этих работах доказательство сходимости МКЭ для несовместного случая не использует традиционные приемы вариационно-разностных методов и является новой математической задачей. Таким образом, если МКЭ в совместном случае можно классифицировать как модификацию метода Ритца, то обоснованное применение несовместных конечных элементов позволяет классифицировать МКЭ как самостоятельный метод не только с точки зрения процедурной реализации, но и с точки зрения теоретического обоснования.

Теперь кратко остановимся на выборе узловых неизвестных. Неизвестное, соответствующее узлу, является общим для всех конечных элементов, содержащих этот узел (звезды элементов – рис. 2.2). Это означает, что функция соответствующая узловому неизвестному в j узле должна быть непрерывной.

Например, для сжато-растянутого стержня (рис. 2.3) при $EF_1 \neq EF_2$ назначение узлового неизвестного в узле $j(x=l)$ в виде перемещения q_j вдоль оси x не приводит к противоречию между главным граничным условием в точке j $u_1(l) = u_2(l) = q_j(l)$ ($u_1(x)$ и $u_2(x)$ – значения функции

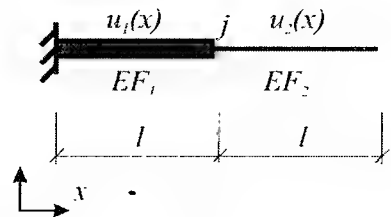


Рис. 2.3

$u(x)$ слева и справа от узла j) и естественным

$$EF_1 \frac{du_1}{dx}(l) = EF_2 \frac{du_2}{dx}(l)$$

Если же в узле j ввести узловое неизвестное $\frac{du}{dx}$, то равенство $\frac{du_1}{dx}(l) = \frac{du_2}{dx}(l)$ будет противоречить естественному граничному условию, т.е. в узле j будет нарушено условие равновесия.

Из таких же соображений для изгибаемых элементов не следует назначать узловые неизвестные в виде значений вторых производных. Из аналогичных соображений для балок-стенок (плоское напряженное

состояние) не следует назначать узловые неизвестные в виде значений угла поворота относительно оси, ортогональной плоскости балки-стенки

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

Из изложенного следует, что узловыми неизвестными могут являться только значения:

- для стержней – трех перемещений и трех углов поворота;
- для балок-стенок – двух перемещений;
- для объемных элементов – трех перемещений;
- для тонких пластин – одного перемещения и двух углов поворота;
- для тонких оболочек и оболочек Рейнснера – трех перемещений и двух углов поворота.

Для других теорий, например, толстых и многослойных пластин, используются дифференциальные уравнения, которые допускают более широкий набор узловых неизвестных.

Мы надеемся, что эти аргументы (и аналогичные, приведенные в [2.33]) будут восприняты исследователями, разрабатывающими новые конечные элементы, а также пользователями, применяющими МКЭ с пониманием особенностей этого метода.

2.3 Исследование конечных элементов

Как уже указывалось выше, одним из важных преимуществ МКЭ является возможность провести исследование сходимости, оценить приближенное решение, исследуя только один тип конечного элемента, который используется для решения данной задачи, абстрагируясь при этом от контура области, нагрузки, граничных условий. По сути в задачу исследования входит определение показателя степени при h в выражении (2.13 – 2.15). если этот показатель больше нуля, то это означает, что МКЭ для данной задачи сходится и имеется возможность оценить приближенное решение.

Пример такого исследования приведем на достаточно распространенном типе КЭ – совместном прямоугольном конечном элементе для плоского напряженного состояния.

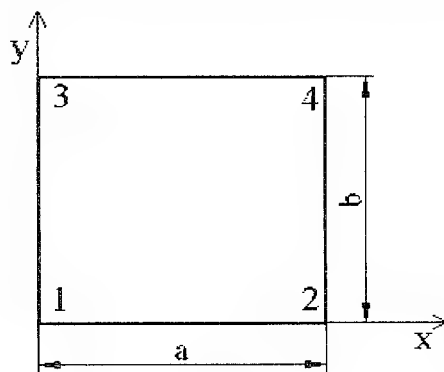


Рис. 2.4

приближенное решение, исследуя только один тип конечного элемента, который используется для решения данной задачи, абстрагируясь при этом от контура области, нагрузки, граничных условий. По сути в задачу исследования входит определение показателя степени при h в выражении (2.13 – 2.15). если этот показатель больше нуля, то это означает, что МКЭ для данной задачи сходится и имеется возможность оценить приближенное

В каждом узле этого элемента (рис. 2.4) вводится по два узловых неизвестных $q_j^{(1)}$, $q_j^{(2)}$ при $j = 1, 2, 3, 4$, которые в физическом смысле соответствуют линейным перемещениям вдоль осей x и y в каждом узле.

Перемещения u , v независимо аппроксимируются функциями:

$$\left. \begin{aligned} u_h(x, y) &= \sum_{i=1}^4 \varphi_i q_i^{(1)}; & v_h(x, y) &= \sum_{i=1}^4 \varphi_i q_i^{(2)}; \\ \varphi_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta); & \varphi_2 &= \xi(1 - \eta); \\ \varphi_3 &= (1 - \xi)\eta; & \varphi_4 &= \xi\eta; \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

где $\xi = \frac{x}{a}$; $\eta = \frac{y}{b}$.

В неявном виде аппроксимация (2.16) выглядит так:

$$u_h(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy;$$

$$v_h(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy.$$

Функции φ_j равны единице в узле j и равны нулю на сторонах, которые не примыкают к j узлу, изменяются по полилинейному закону на Ω_e и по линейному на сторонах, примыкающих к узлу j .

Система функций (2.16) линейно независима. Линейный закон изменения функций φ_i на сторонах конечных элементов обеспечивает непрерывность перемещений по области контакта конечных элементов, а, следовательно, и существование напряжений и деформаций, входящих в функционал потенциальной энергии. Таким образом, система функций (2.16) принадлежит энергетическому пространству H_A .

Для плоского напряженного состояния порядок дифференциального оператора $2m=2$. Поэтому, чтобы показатель степени $p+1-m$ в оценках (2.13 – 2.15) был больше нуля, необходимо, чтобы порядок аппроксимации хотя бы равнялся 1, т. е. $p=1$.

Узловыми неизвестными являются перемещения узлов $u(x_j, y_j)$ и $v(x_j, y_j)$, поэтому функционалы B_{jg} , $g=1, 2$ имеют вид $B_{j,1} = u(x_j, y_j)$, $B_{j,2} = v(x_j, y_j)$ (см. раздел 2.2, выражение 2.12).

Поскольку перемещения u и v аппроксимируются одними и теми же функциями φ_j , тождества вида (2.12) при $p=1$ достаточно проверить для $B_{j,1}$. В рассматриваемом случае из (2.12) получаем систему тождеств.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 &\equiv 1; \\ a(\varphi_2 + \varphi_4) &\equiv x; \\ b(\varphi_3 + \varphi_4) &\equiv y. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Подставляя (2.16) в (2.17) видим, что тождества удовлетворяются. Таким образом, функция (2.16) отвечает всем трем требованиям. Так как $m=1$ и $p=1$, то на основе оценок (2.14) и (2.15) можно сделать вывод, что

решение сходится по перемещениям с порядком h^2 , а по напряжениям с порядком h .

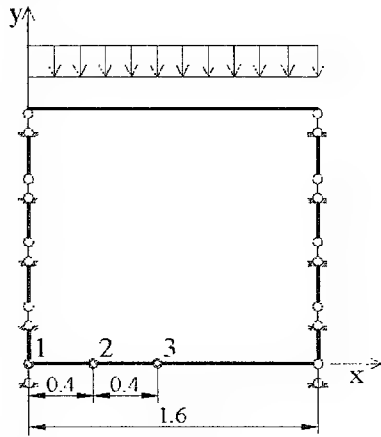


Рис. 2.5

Проверим этот прогноз численным экспериментом. Рассчитаем жестко подвешенную прямоугольную балку-стенку под равномерно распределенную нагрузку $p=500$ тс/м, приложенную к верхней грани (рис. 2.5). Модуль упругости материала $E=2,65 \cdot 10^6$ тс/м², коэффициент Пуассона $\nu=0,15$; толщина конструкции $\delta=0,1$ м.

Решение этой задачи в рядах с высоким порядком сходимости для некоторых точек области приведено в графе 5 табл. 2.1. В графах 6, 7, 8, 9 приведены значения перемещений и напряжений для трех точек нижней грани, полученные решением по МКЭ для различной густоты сетки. Как и следовало ожидать, порядок сходимости для перемещений составляет h^2 , а для напряжений h , так как с удвоением густоты сетки разность между точным и приближенным решением для перемещений уменьшается примерно в 4 раза, а для напряжений примерно в 2 раза.

Таблица 2.1

№ точки	Координаты узлов		Вид перемещений и напряжений	Решение в рядах с точностью до пяти значащих цифр	Решение по МКЭ при расчетной сетке			
	x	y			4×4	8×8	16×16	32×32
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	u	-0,71927	-0,5808	-0,6808	-0,7093	-0,7167
2	0,4	0	u	-0,50801	-0,4107	-0,4812	-0,5011	-0,5062
			v	-0,67233	-0,5555	-0,6204	-0,6641	-0,6702
3	0,8	0	v	-0,94990	-0,7857	-0,9053	-0,9385	-0,9470
2	0,4	0	σ_x	264,82	190,27	228,00	246,80	255,8
3	0,8	0	σ_x	374,31	268,98	321,99	348,12	361,2

Примечание: величины перемещений даны в мм, а напряжений – в кгс/см².

Ввиду гладкости граничных условий, нагрузки и области системы не следует ожидать наличия каких-либо сингулярностей, в связи с чем оценка (2.15) в данном случае окажется достаточно правомерной. Из данного примера видно, что если точное решение и неизвестно, то на основе оценки

(2.15) и двух расчетов, например на сетке 4×4 и 8×8 , можно составить представление о точном решении. Так, для точки 3 при сетке 4×4 $v_{4 \times 4} = -0,7857$, а при сетке 8×8 $v_{8 \times 8} = -0,9053$. Разность между ними составляет 0,1196. Можно ожидать, что при следующем двойном сгущении сетки эта разность уменьшится в 4 раза, т.е. $v_{16 \times 16} = +0,9053 + 0,25 \times 0,1196 = 0,9352$, а $v_{32 \times 32} = +0,9352 + 0,25 \times (0,9352 - 0,9057) = +0,9427$. Продолжая этот ряд можно оценить пределы, в которых лежит точное значение этого перемещения.

Имеется другой, по-видимому, более короткий путь оценки точного решения основанный на перенесении на МКЭ экстраполяции Ричардсона для разностных схем, которая обоснована и исследована в работе [2.13]. Продемонстрируем эту идею на вышеприведенном примере.

Уточненное решение $\tilde{y}$ ищется в виде:

$$\tilde{y} = C_1 u_1 + C_2 u_2$$

где u_1 и u_2 – решения, полученные при последовательном сгущении сетки (для вышеприведенного примера для вертикального перемещения точки 3 – $u_1 = v_{3,4 \times 4} = -0,7857$, а $u_2 = v_{3,8 \times 8} = -0,9053$).

C_1 и C_2 находятся из системы уравнений:

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$C_1 h'_1 + C_2 h'_2 = 0$$

Для вышеприведенного примера $t=2$ (порядок сходимости прямоугольного конечного элемента по перемещениям), а $h_2 = 0.5h_1$, (т.е. сетка сгущалась в 2 раза).

Из системы уравнений $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1; \\ C_1 h'_1 + C_2 (0.5h_1)^2 = C_1 + 0.25C_2 = 0; \end{cases}$ получим

$$C_1 = -\frac{1}{3}; \quad C_2 = \frac{4}{3}.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{3} v_{4 \times 4} + \frac{4}{3} v_{8 \times 8} = v_{8 \times 8} + \frac{1}{3} (v_{8 \times 8} - v_{4 \times 4}) = +0,9053 + \frac{1}{3} (0,9053 - 0,7857) = \\ &= 0,9053 + 0,03987 = 0,9452 \end{aligned}$$

Если взять значения v для более густых сеток, т.е. $u_1 = v_{16 \times 16} = 0,9385$, а $u_2 = v_{32 \times 32} = 0,9470$, то $v = 0,9470 + \frac{1}{3} (0,9470 - 0,9385) = 0,94983$, т.е. практически точное решение.

Использование квадратичных оценок (2.13 – 2.15) для оценки сходимости в отдельных точках для данной задачи, дало хорошие результаты в связи с тем, что здесь отсутствовали какие-либо сингулярности. На практике сингулярность всегда присутствует: контур с

входящими углами, точечные опоры и нагрузки, резкое изменение толщины пластины и т.п.

Исследование других типов конечных элементов приведено в Приложении 1.

2.4 Связь МКЭ с методами строительной механики стержневых систем

Систему уравнений (2.7) $Kq-P=0$ можно трактовать как уравнение равновесия. Ее аналогом в строительной механике стержневых систем является каноническая система уравнений метода перемещений.

В МКЭ компоненты матрицы жесткости вычисляются исходя из формул (2.6), (2.8), полученных из минимизации функционала Лагранжа. В строительной механике стержневых систем их находят как реакции от единичных перемещений. Если базисные функции удовлетворяют однородному уравнению равновесия, оба метода дают одинаковый результат.

Покажем это для рассмотренного примера сжато-растянутого стержня.

Базисные функции имеют вид:

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{x}{l}, \quad \varphi_2 = \frac{x}{l}, \quad \text{тогда} \quad \varepsilon(\varphi_i) = \frac{d\varphi_i}{dx}, \quad \varepsilon(\varphi_1) = -\frac{1}{l}, \quad \varepsilon(\varphi_2) = \frac{1}{l} \quad \text{и из (2.6)}$$

получаем:

$$K_{i,j} = \int_0^l EF \varepsilon(\varphi_i) \varepsilon(\varphi_j) dx, \quad \text{откуда непосредственными вычислениями получаем:}$$

$$k_{1,1} = k_{2,2} = \frac{EF}{l}, \quad k_{1,2} = -\frac{EF}{l} = k_{2,1}$$

Выражение для $K_{i,j}$ можно преобразовать, пользуясь тем, что функции $\varphi_i(x)$

удовлетворяют однородному уравнению равновесия $EF \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} = 0$. Интегрируя по частям, получим:

$$K_{i,j} = \int_0^l EF \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx = EF \frac{d\varphi_i}{dx}(l) \varphi_j(l) - EF \frac{d\varphi_i}{dx}(0) \varphi_j(0) - \int_0^l EF \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \varphi_j dx$$

Интегральное слагаемое равно нулю, т.к. $EF \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} = 0$. Поскольку $\varphi_1(0) = \varphi_2(l) = 1$, $\varphi_1(l) = \varphi_2(0) = 0$, получаем:

$$K_{1,1} = -EF \frac{d\varphi_1}{dx}(0), \quad K_{2,2} = EF \frac{d\varphi_2}{dx}(l), \quad K_{1,2} = EF \frac{d\varphi_1}{dx}(l), \quad K_{2,1} = -EF \frac{d\varphi_2}{dx}(0)$$

В строительной механике стержневых систем эти величины трактуются как реакции от единичных перемещений.

Аналогично рассматривается изгибаемый стержень, базисные функции (2.24) которого

удовлетворяют однородному уравнению $EF \frac{d^4 \varphi_i}{dx^4} = 0$.

Применяя два раза интегрирование по частям, получим равенство:

$$K_{i,j} = \int_0^l EI \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_j}{dx^2} dx = EI \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2}(l) \frac{d\varphi_j}{dx}(l) - EI \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2}(0) \frac{d\varphi_j}{dx}(0) - \\ - EI \frac{d^3 \varphi_i}{dx^3}(l) \varphi_j(l) + EI \frac{d^3 \varphi_i}{dx^3}(0) \varphi_j(0).$$

Таким образом, если базисные функции удовлетворяют однородным уравнениям равновесия, МКЭ и методы механики стержневых систем дают одинаковые матрицы жесткости.

Выражение (2.7) для получения компонентов вектора P в строительной механике стержневых систем трактуется как процедура приведения местной нагрузки к узловой.

Таким образом, процедура решения задачи по МКЭ полностью соответствует методам строительной механики стержневых систем. Некоторое отличие можно проследить только в процедуре составления матрицы жесткости: для МКЭ всегда используется формула (2.8), для стержневых систем матрица жесткости часто строится из других соображений. Правда, стержневые системы имеют одну особенность: гипотеза плоских сечений, лежащая в основе их расчета, с одной стороны, обуславливает совместность конечных элементов, с другой стороны, порождает дифференциальный оператор задачи. Поэтому здесь появляется возможность подобрать такие базисные функции, которые, с одной стороны, являются решением однородного дифференциального уравнения,

с другой стороны, дают возможность построить совместные конечные элементы. МКЭ в этом случае для стержневых систем будет точным методом в смысле точного решения дифференциальных уравнений вида:

$$EF \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0 \text{ и } EI \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} = 0.$$

Вместе с тем можно привести примеры, когда есть смысл для стержневых систем использовать приближенные базисные функции. Рассмотрим стержень на упругом основании Пастернака с коэффициентами постели C_1 и C_2 . Дифференциальное уравнение, описывающее напряженное состояние стержня, в этом случае имеет вид:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - C_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + C_1 w = f.$$

Выражение потенциальной энергии:

$$P = \frac{1}{2} \int_a \left[C_2 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + C_1 w^2 \right] dx.$$

В каждом узле стержня примем два узловых неизвестных (рис. 2.6):

U_{z1}, U_{z2} – вертикальные перемещения узлов 1 и 2;

$U_1^{(y)}, U_2^{(y)}$ – поворот вокруг оси y .

$$u_z(x) = X_3 U_{z1} + X_4 U_{z2} + X_5 U_1^{(y)} + X_6 U_2^{(y)} \quad (2.19)$$

где X_3, X_4, X_5, X_6 – базисные функции изгибаемого стержня (2.24).

Как легко убедиться, (2.19) не является точным решением дифференциального уравнения задачи.

Используя стандартную процедуру МКЭ, построим матрицу жесткости (табл. 2.2), которая отличается от известной в строительной механике стержневых систем.

Основная цель приведенного примера продемонстрировать, что базисные функции типа (2.24) дают точное решение для стержневых систем только в случае, если их напряженное состояние описывается

однородными дифференциальными уравнениями типа $EI \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} = 0$ и

$EI \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0$. Если же дифференциальные уравнения имеют другой вид,

как, например, в этом примере или в других случаях (стержень, работающий в условиях стесненного кручения, с учетом предварительного натяжения, физической нелинейности и мн. др.), то здесь надо иметь ввиду, что применяемая процедура МКЭ обуславливает приближенное решение и к решаемой задаче необходимо подходить с позиций МКЭ – сгущать сетку (дробить стержень), оценивать приближенное решение и т.п.

Таблица 2.2

U_{z1}	$U_1^{(y)}$	U_{z2}	$U_2^{(y)}$	
$12 \frac{EI}{l^3} + \frac{13}{35} C_1 l +$ $+ 1.2 \frac{C_2}{l}$	$6 \frac{EI}{l^2} + \frac{11}{210} C_1 l^2 +$ $+ 0.1 C_2$	$-12 \frac{EI}{l^3} + \frac{9}{70} C_1 l -$ $-1.2 \frac{C_2}{l}$	$6 \frac{EI}{l^2} - \frac{13}{420} C_1 l^2 +$ $+ 0.1 C_2$	R_1
	$4 \frac{EI}{l} + \frac{1}{105} C_1 l^3 +$ $+ \frac{2}{15} C_2 l$	$-6 \frac{EI}{l^2} + \frac{13}{420} C_1 l^2 -$ $-0.1 C_2$	$2 \frac{EI}{l} - \frac{1}{140} C_1 l^3 -$ $- \frac{1}{30} C_2 l$	R_2
		$12 \frac{EI}{l^3} + \frac{13}{35} C_1 l +$ $+ 1.2 \frac{C_2}{l}$	$-6 \frac{EI}{l^2} - \frac{11}{210} C_1 l^2 -$ $-0.1 C_2$	R_3
			$4 \frac{EI}{l} + \frac{1}{105} C_1 l^3 +$ $+ \frac{2}{15} C_2 l$	R_4

Выясним сходимость МКЭ с использованием аппроксимирующих полиномов (2.19) и оценим погрешность на основе изложенной методики (см. п. 2.2). Выясним, удовлетворяют ли функции (2.19) требованиям, предъявляемым к базисным функциям МКЭ.

1. Функция принадлежит энергетическому пространству H_A , так как она обеспечивает непрерывность первых производных от u_z как по области элементов, так и по границам между элементами, что обусловлено общностью $\frac{\partial u_z}{\partial x}$ для двух смежных элементов.

2. Нетрудно убедиться, что функции (2.19) линейно независимы.

3. Покажем, что система функций, построенная на основе (2.19), полна в пространстве H_A . Для принятой системы функций согласно (2.12) необходимо выполнение следующих тождеств:

$$X_3 + X_4 \equiv 1; \quad aX_4 + X_5 + X_6 \equiv x;$$

$$\frac{a^2}{2} X_4 + aX_6 \equiv \frac{x^2}{2}; \quad \frac{a^3}{6} X_4 + \frac{a^2}{2} X_6 \equiv \frac{x^3}{6}.$$

Для функций (2.19) эти тождества справедливы. Таким образом, выбранные функции удовлетворяют всем трем требованиям и,

следовательно, для приближенного решения задачи справедлива оценка (2.15), т.е. $\|u - u_h\|_{L_2} \leq ca^4$, так как для данного случая $2m=4$ – порядок дифференциального оператора задачи; $p=3$ – максимальная степень многочлена, которая выражается линейными комбинациями базисных функций X_3, X_4, X_5, X_6 и согласно (2.15) $t = 2(p + 1 - m) = 4$.

Подобную методику с использованием приближенных базисных функций можно было бы выполнить для стержня работающего в условиях стесненного кручения или с предварительным натяжением. В ряде случаев это оказывается более удобным, чем применение точных формул, которые, как правило, громоздки, содержат особые точки и имеют другие неудобства при практической реализации.

Таким образом, глубокая связь МКЭ с методами строительной механики стержневых систем может оказать взаимное плодотворное влияние. С одной стороны, МКЭ может использовать богатый опыт методов расчета стержневых систем, с другой стороны, о чем указывалось выше, в необходимых случаях имеется возможность проводить приближенное построение матриц жесткости стержней с использованием приемов МКЭ с последующей оценкой сходимости на основе хорошо разработанного математического аппарата МКЭ.

2.5 Применение МКЭ для решения линейных задач

Схема решения задач. Можно выделить пять основных этапов решения задач по МКЭ: расчленение системы на КЭ и выбор базисных функций; построение матриц жесткости и приведение местной нагрузки к узловой для каждого КЭ; построение канонических уравнений; решение канонических уравнений и определение значений узловых неизвестных; определение компонентов напряженно-деформированного состояния (перемещений, напряжений) по области элемента и всей системы.

Расчленение системы на конечные элементы – задача по своей сути близкая к нанесению расчетной сетки в методе конечных разностей или в вариационно-разностном методе. Здесь необходимо удовлетворить двум противоречивым требованиям: точности расчета, которая требует большего количества расчетных узлов (большей густоты расчетной сетки), и практическому решению задачи, которое накладывает ограничение на число решаемых уравнений типа (2.7), а следовательно, и на число расчетных узлов.

Построение матриц жесткости и приведение местной нагрузки к узловой осуществляется по формулам (2.8) и (2.9). В простейших случаях элементы матриц получаются в автоматическом виде на основе

интегрирования (2.8, 2.9) в общем виде. Для более сложных случаев выражения базисных функций интегрирования производится численными методами.

Для составления канонических уравнений используются формулы (2.7). Канонические уравнения решаются известными методами решения линейных алгебраических уравнений. Так как число узловых неизвестных при решении сложных задач может достигать многих сотен тысяч, то это вырастает в одну из основных проблем МКЭ, впрочем, как и для всякого численного метода. Более подробно эта проблема будет рассмотрена в главе 3. В результате решения системы линейных уравнений определяются значения узловых неизвестных. По найденному вектору узловых неизвестных q и системе базисных функций $\{\varphi_i\}$, которая была назначена заранее, определяется функция перемещений (2.4) по всей области системы, а по ней – напряжения и деформации в интересующих исследователя местах.

Описанная процедура достаточно традиционна и совершенно инвариантна к классу рассчитываемых конструкций. Исключением является процедура составления матрицы жесткости, которая обусловлена типом выбранных базисных функций и зависит от записи выражения потенциальной энергии системы, т.е. вида матриц D , B , векторов σ , ε , u . Поэтому дальнейшее рассмотрение применения МКЭ к различным классам линейных задач будет сводиться к описанию матриц D и B и векторов σ , ε , u , а также к краткому описанию базисных функций.

Стержневые системы. Введение гипотезы плоских сечений дает возможность описать напряженно-деформированное состояние стержня в рамках одномерной задачи. Выражение для потенциальной энергии стержневой системы имеет вид:

$$P = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(M_y \frac{d^2 u_z}{dx^2} + M_z \frac{d^2 u_y}{dx^2} + M_x \frac{du^{(x)}}{dx} + N \frac{du_x}{dx} \right) d\Omega, \quad (2.21)$$

где:

$M_y = EI_y \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$; $M_z = EI_z \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$; $M_x = GI_x u^{(x)}$ – моменты, действующие в сечении относительно осей x , y , z ;

$N = EF \frac{\partial u_x}{\partial x}$ – нормальная сила в сечении;

u_x , u_y , u_z – перемещения вдоль осей x , y , z ;

$u^{(x)}$ – угловое (крутильное) перемещение относительно оси x ;

Для аппроксимации этих перемещений используются выражения:

$$u_x = X_1 \cdot U_{x1} + X_2 \cdot U_{x2};$$

$$u^{(x)} = X_1 \cdot U_1^{(x)} + X_2 \cdot U_2^{(x)};$$

$$u_z = X_3 \cdot U_{z1} + X_4 \cdot U_{z2} + X_5 \cdot U_1^{(z)} + X_6 \cdot U_2^{(z)};$$

$$u_y = X_3 \cdot U_{y1} + X_4 \cdot U_{y2} + X_5 \cdot U_1^{(y)} + X_6 \cdot U_2^{(y)} \quad (2.22)$$

где $U_{x1}, U_{x2}, U_{y1}, U_{y2}, U_{z1}, U_{z2}$ – неизвестные линейные перемещения узлов начала (1) и конца (2) стержня (рис. 2.6);

$U_1^{(x)}, U_2^{(x)}, U_1^{(y)}, U_2^{(y)}, U_1^{(z)}, U_2^{(z)}$ – неизвестные угловые перемещения узлов начала и конца стержня (рис. 2.6).

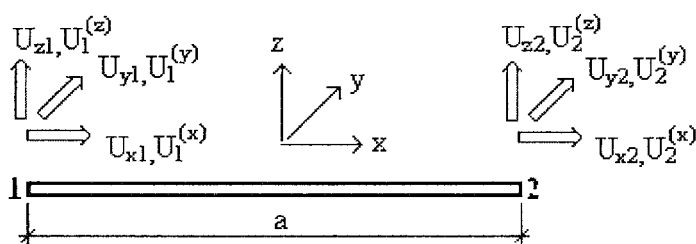


Рис. 2.6

X_1, X_2 – линейные базисные функции;

$$X_1 = a^{-1}(a - x), \quad X_2 = a^{-1}x \quad (2.23)$$

X_3, X_4, X_5, X_6 – балочные базисные функции:

$$\begin{aligned} X_3 &= a^{-3}(2x^3 - 3ax^2 + a^3), & X_4 &= -a^{-3}(2x^3 - 3ax^2), \\ X_5 &= a^{-2}(x^3 - 2ax^2 + a^2x), & X_6 &= a^{-2}(x^3 - ax^2) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Используя выражение для потенциальной энергии (2.21) и принятую аппроксимацию (2.22), по формуле (2.8) строится матрица жесткости стержня (табл. 2.3). Интегрирование ведется по одномерной области с пределами 0, a (см. рис. 2.6).

В табл. 2.3 принято:

$$k_1 = \frac{EF}{a}; \quad k_2 = \frac{12EI_z}{a^3}; \quad k_3 = \frac{12EI_z}{a^3}; \quad k_4 = \frac{GI_\kappa}{a}; \quad k_5 = \frac{4EI_y}{a};$$

$$k_6 = \frac{4EI_z}{a}; \quad k_7 = \frac{6EI_z}{a^2}; \quad k_8 = \frac{6EI_y}{a^2}; \quad k_9 = 0,5k_5; \quad k_{10} = 0,5k_6.$$

Таблица 2.3

Ux_1	Uy_1	Uz_1	$U_1(x)$	$U_1(y)$	$U_1(z)$	Ux_2	Uy_2	Uz_2	$U_2(x)$	$U_2(y)$	$U_2(z)$	Степени свободы Узловые усилия	
q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}	q_{12}		
k_1						$-k_1$						R_1	Rx_1
	k_2				k_7		$-k_2$				k_7	R_2	Ry_1
		k_3		$-k_8$				$-k_3$		$-k_8$		R_3	Rz_1
			k_4						$-k_4$			R_4	RMx_1
				k_5				$-k_8$		k_9		R_5	RMv_1
					k_6		k_7				k_{10}	R_6	RMz_1
						k_1						R_7	Rx_2
							k_2				$-k_7$	R_8	Ry_2
Симметрично								k_3		k_8		R_9	Rz_2
									k_4			R_{10}	RMx_2
										k_5		R_{11}	RMv_2
											k_6	R_{12}	RMz_2

Хотя данная матрица содержится во всех учебниках по строительной механике стержневых систем, здесь она приводится как пример построения МЖ аналитическими методами в явном виде. Величины k_1 - k_{10} – значения узловых усилий от соответствующих единичных значений узловых неизвестных. В строительной механике стержневых систем узловые усилия определяются как реакции концов стержня от единичных перемещений его концов.

Так как аппроксимация всех членов вектора u независима, то из матрицы жесткости для общего случая (см. табл. 2.3) легко получить матрицы жесткости для различных частных случаев:

1) для шарнирного (ферменного) стержня элементы:

строки узловых усилий – R_1, R_7 ;

графы узловых перемещений – q_1, q_7 ;

элементы матрицы жесткости – k_{11}, k_{17}, k_{77} ;

2) для изгибаемого стержня (элемент ростверка в плоскости XOY)

элементы:

строки узловых усилий – $R_3, R_4, R_5, R_9, R_{10}, R_{11}$;

графы узловых перемещений – $q_3, q_4, q_5, q_9, q_{10}, q_{11}$;

элементы матрицы жесткости – $k_{33}, k_{35}, k_{39}, k_{311}, k_{44}, k_{410}, k_{55}, k_{59}, k_{511}, k_{99}, k_{911}, k_{1010}, k_{1111}$;

3) для сжато (растянуто)-изгибаемого стержня (элемент рамной стержневой системы в плоскости XOZ) элементы:

строки узловых усилий – $R_1, R_3, R_5, R_7, R_9, R_{11}$;

графы узловых перемещений – $q_1, q_3, q_5, q_7, q_9, q_{11}$;

элементы матрицы жесткости – $k_{11}, k_{17}, k_{33}, k_{35}, k_{39}, k_{311}, k_{55}, k_{59}, k_{511}, k_{77}, k_{99}, k_{910}, k_{1111}$.

Балки-стенки (плоское напряженное состояние). Теория плоского напряженного состояния основана на гипотезе, допускающей отсутствие напряжений, нормальных к срединной плоскости пластинки.

Вектор перемещений u , вектор деформаций ε , вектор напряжений σ , вектор внешней нагрузки f , выражение для потенциальной энергии, матрица дифференцирования B и матрица упругости D имеют вид:

$$u^T = (u_x, u_y); \quad \varepsilon^T = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy});$$

$$\sigma^T = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}); \quad f^T = (p_x, p_y);$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) d\Omega$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} E\delta & \nu E\delta & 0 \\ 1-\nu^2 & 1-\nu^2 & 0 \\ \nu E\delta & E\delta & 0 \\ 1-\nu^2 & 1-\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & E\delta \\ & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

где u_x, u_y, p_x, p_y – перемещения и внешняя нагрузка по направлению осей x, y ; E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона, δ – толщина.

Для решения задач плоского напряженного состояния наиболее употребительны треугольный и прямоугольный конечные элементы, имеющие по два линейных неизвестных перемещения узле и независимую аппроксимацию перемещений u_x и u_y с помощью линейных и полилинейных базисных функций.

Процедура получения матрицы жесткости в явном виде для этих элементов особых трудностей не представляет. Эта матрица приведена во многих книгах по МКЭ, например, в [2.7, 2.18]. Часто используются также четырехугольные конечные элементы, для которых получить матрицу жесткости в явном виде затруднительно и для ее построения применяется численное интегрирование.

Изгибаемые плиты. Теория тонких изгибаемых плит основана на гипотезе Кирхгофа о прямых нормалях к срединной поверхности пластины и пренебрежимо малом напряжении, перпендикулярном к той же поверхности. Выражение для потенциальной энергии системы:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T \sigma d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Bu_z)^T D \cdot (Bu_z) d\Omega, \quad (2.26)$$

где u_z – перемещения, ортогональные срединной поверхности, для плит эти перемещения часто обозначаются w ; ε – вектор обобщенных деформаций (в данном случае кривизны); σ – вектор обобщенных напряжений (в данном случае моментов).

Векторы ε , σ и матрицы B , D имеют вид:

$$\varepsilon^T = \begin{pmatrix} \partial^2 u_z / \partial x^2 & \partial^2 u_z / \partial y^2 & \partial^2 u_z / \partial x \partial y \end{pmatrix}; \quad \sigma^T = (M_x, M_y, M_{xy});$$

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \partial^2 u_z / \partial x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial^2 u_z / \partial y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial^2 u_z / \partial x \partial y \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Наиболее употребительными конечными элементами являются треугольные, прямоугольные и четырехугольные конечные элементы с тремя узловыми неизвестными в узле (вертикальное перемещение и два угла поворота). Базисные функции достаточно сложны [2.1].

Гипотезы Кирхгофа предполагают, в частности, что $u^{(x)} = \frac{\partial u_z}{\partial y}$, $u^{(y)} = -\frac{\partial u_z}{\partial x}$. Отказ от этих предположений приводит к теории толстых изгибаемых плит Рейснера. Тогда сдвиговые деформации $\varepsilon_{x,z}$ и $\varepsilon_{y,z}$ отличны от нуля, $\varepsilon_{x,z} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + u^{(y)}$, $\varepsilon_{y,z} = \frac{\partial u_z}{\partial y} - u^{(x)}$, и в выражении для потенциальной энергии (2.26) добавляется слагаемое $\frac{1}{2} \int_{\Omega} G\delta(\varepsilon_{x,z}^2 + \varepsilon_{y,z}^2) d\Omega$.

Все деформации и усилия, входящие в формулу (2.26), выражаются через первые производные функций u_z , $u^{(y)}$ и $u^{(x)}$.

Для их аппроксимации возможно использование тех же аппроксимирующих функций, что и для балок-стенок.

Оболочечные системы. Оболочки двоякой кривизны – один из самых сложных объектов строительной механики. Это вызвано сложными геометрическими и физическими соотношениями для оболочек. Приведем векторы напряжений σ и деформаций ε , построенные на основе технической теории пологих оболочек. Вектор ε состоит из шести компонентов:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + k_1, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} + k_2 u_z, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + 2k_{12} u_z - \text{деформации}$$

срединной поверхности;

$$\chi_x = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, \quad \chi_y = \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} - \text{деформации кривизны.}$$

$$\text{В этих выражениях } k_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad k_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \quad k_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad - \text{кривизны}$$

оболочки, характеризующие ее геометрию.

Вектор напряжений (усилий) также состоит из шести компонентов:

$$N_x = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad N_y = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad S = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy} -$$

погонные напряжения;

$$M_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_x + \nu \chi_y), \quad M_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_y + \nu \chi_x),$$

$$M_{xy} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)} \chi_{xy} - \text{погонные моменты.}$$

Здесь h – толщина оболочки; E , ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Для оболочки вектор перемещений u состоит из компонентов u_x , u_y , u_z , $u^{(x)}$, $u^{(y)}$.

С учетом принятых обозначений и соотношений выражение для полной потенциальной энергии тонкой оболочки примет вид:

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T \varepsilon d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + S \varepsilon_{xy} + M_x \chi_x + M_y \chi_y + 2M_{xy} \chi_{xy}) d\Omega \quad (2.28)$$

Матрицы жесткости КЭ имеющих двоякую кривизну по области элемента и построенных на основе приведенных выше зависимостей характерных для технической теории тонких оболочек не свободных от жесткого смещения. Так в [2.19] приведена характерная для этого случая матрица жесткости прямоугольного КЭ оболочки имеющей положительную Гауссову кривизну. При придании узлам этого КЭ перемещений обуславливающих простое перемещение этого элемента в пространстве (например, всем четырем узлам сообщается вертикальное перемещение, равное единице) в КЭ появляются деформации, что противоречит здравому смыслу. Наиболее действенным приемом

устраняющим это нежелательный эффект является замена криволинейной поверхности оболочки – многогранником. В работе [2.20] и приложении 1 доказана правомерность такой замены. В этом случае матрица жесткости треугольного, прямоугольного, четырехугольного конечного элемента оболочки будут представлять собой комбинацию КЭ плоского напряженного состояния и изгибаемой плиты.

Массивные конструкции (трехмерное напряженное состояние). При расчете массивных тел методом конечных элементов используются зависимости для трехмерного напряженного состояния. Эти зависимости являются наиболее общими, так как свободны от различных гипотез и предпосылок, характерных для некоторых частных задач (гипотезы плоских сечений для стержня, прямых нормалей для изгибаемых пластин, о нулевых напряжениях, ортогональных плоскости системы, для плоского напряженного состояния и т.п.).

Выражение потенциальной энергии для трехмерного напряженного состояния имеет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T \sigma d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Bu)^T D \cdot (Bu) d\Omega, \quad (2.29)$$

где u – вектор перемещений; ε – вектор деформаций; σ – вектор напряжений; B – матрица дифференцирования; D – матрица упругости.

$$u^T = (u_x, u_y, u_z); \quad \varepsilon^T = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz});$$

$$\sigma^T = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz});$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\vartheta & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\vartheta & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\vartheta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta \end{bmatrix}$$

$$\text{где } \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \vartheta = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Для решения задач трехмерного напряженного состояния наиболее употребительны конечные элементы в форме четырехугольника

(тетраэдра), шестигранника (призмы), восьмигранника (параллелепипеда), имеющие по три неизвестных узловых перемещения в узле и полилинейную аппроксимацию перемещений u_x, u_y, u_z .

Матрицы жесткости таких элементов приведены в ряде публикаций, например в [2.1, 2.7, 2.18].

Другие типы конструкций. Рассмотренные выше типы конструкций с точки зрения применения для их расчета и исследования МКЭ, далеко не исчерпывают встречающиеся в практике инженера типы. Это и конструкции на упругом основании, и многослойные анизотропные пластины, и толстые плиты, оболочки и мн. др.

Во всех этих случаях приемы построения и исследования КЭ, рассмотренные выше могут оказаться полезными или применяться с небольшими дополнениями. Так при построении КЭ плит на упругом основании, в случае если используется клавишная модель Винклера или Пастернака можно применить рассмотренные конечные элементы плиты и эти же базисные функции использовать для построения КЭ упругого основания [2.21]. Для анизотропных пластин можно использовать соответствующие базисные функции и набор узловых неизвестных, заменив только вид матрицы D . Для толстых и многослойных пластин набор узловых неизвестных необходимо несколько расширить, чтобы учесть дополнительные факторы сдвига, наклона нормалей и др., хотя вышеприведенные приемы построения КЭ можно использовать и в этих случаях.

2.6 Применение МКЭ для решения нелинейных задач

Нелинейным задачам (нелинейная упругость, геометрическая нелинейность и другие) соответствует уравнение равновесия: $A(u)=f$

Вид нелинейного дифференциального оператора A определяется исследуемой задачей.

Например, для нелинейного упругого сжато растянутого стержня с зависимостью между напряжениями и деформациями вида $\sigma(\varepsilon) = R(1 - e^{-\alpha\varepsilon})$ оператор $A(u)$ имеет вид:

$$A(u) = - \frac{d}{dx} [RF(1 - e^{-\alpha\varepsilon})],$$

где $\alpha = E/R$, E – начальный модуль упругости, R – предельное напряжение, $\varepsilon = \frac{du}{dx}$.

Для геометрически нелинейного элемента (нить) оператор $A(u)$ имеет вид:

$$A(u) = - \frac{d}{dx} \left(EF \left(1 + \left(\frac{du_z}{dx} \right)^2 - 1 \right) \frac{du_z}{dx} \right)$$

Ниже изложение всех методов решения нелинейных задач проводится на основе применения МКЭ, поэтому приведем вариационную постановку задачи, т.е. как и в линейном случае используем принцип возможных перемещений. Рассмотрим функционалы возможных работ внутренних и внешних сил

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A(u) \cdot v d\Omega, \quad (f, v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega \quad (2.31)$$

где $v \in H_A$ – возможное перемещение.

Эти функционалы линейны по переменной v .

При исследовании и решении задачи используется принцип возможных перемещений: решение u удовлетворяет при всех $v \in H_A$ равенству

$$a(u, v) = (f, v) \quad (2.32)$$

Решение задачи (2.32) МКЭ ищем, как и в линейном случае, в виде:

$$u_h(x) = \sum_{l=1}^L q_l \varphi_l(x) \quad (2.33)$$

Поставив в (2.32), получим нелинейную систему уравнений относительно узловых неизвестных q_l .

$$a(u_h, \varphi_\eta) = (f, \varphi_\eta) \quad (2.34)$$

В [2.30, 2.31, 2.32] показано, что если оператор $A(u)$ удовлетворяет условию строгой монотонности

$$a(u_2, u_2 - u_1) - a(u_1, u_2 - u_1) \geq k \|u_2 - u_1\|_A^2 \quad (2.35)$$

то для сходимости МКЭ базисные функции должны удовлетворять тем же требованиям, что и в линейном случае. Условие (2.35) в физическом смысле означает увеличение энергии при увеличении перемещений. Обозначим $a'(u, v, w)$ производную функционала $a(u, v)$ по u , т.е.

$$a'(u, v, w) = \frac{d}{dt} a(u + tw, v)_{t=0} \quad w \in H_A \quad (2.36)$$

где w , также как и v – возможные перемещения.

Условие строгой монотонности (2.35) выполнено, если функционал $a'(u, v, w)$ положительно определен, т.е. для всех $v \in H_A$ справедливо неравенство

$$a'(u, v, w) \geq k \cdot v_A^2 \quad (2.37)$$

Неравенства (2.35, 2.36) справедливы, как показано в [2.30, 2.31, 2.32], для физически нелинейных задач и геометрически нелинейных задач в докритической стадии.

При выполнении неравенств (2.35) или (2.37) оценки погрешности МКЭ справедливы при тех же условиях на базисные функции, что и для соответствующей линейной задачи.

Отметим, что неравенства (2.35) или (2.37) являются также [2.30, 2.31, 2.32] и достаточными условиями существования и единственности решения задачи (2.32).

Приближенные методы решения нелинейных уравнений (2.32) или (2.34) основаны на построении последовательности линейных задач и используют производную $a'(u, v, w)$.

Подставив перемещения u_h в $a'(u, v, w)$, получим формулы для линеаризованной матрицы жесткости

$$k_{i,j} = a'(u_h, \varphi_i, \varphi_j) \quad (2.38)$$

Здесь под u_h подразумевается приближенное решение, полученное на предыдущем шаге (итерации).

Выражение (2.38) можно получить, дифференцируя $a(u_h, \varphi_i)$ по q_i , т.е. дискретизацию $a(u, v)$ на основе МКЭ и линеаризацию задачи можно производить в любом порядке.

Например, для нелинейного упругого сжато-растянутого закрепленного слева стержня с зависимостью $\sigma(\varepsilon) = R(1 - e^{-\alpha\varepsilon})$ функционал возможной работы внутренних сил

$$\text{имеет вид: } \sigma(\varepsilon) = R \left(1 - e^{-\alpha \frac{dv}{dx}} \right) \frac{dv}{dx} dx, \text{ где } \alpha = ER^{-1}.$$

$$\text{Вычислив его производную по } u \text{ получим: } a'(u, v, w) = \int_0^l EF e^{\alpha \frac{du}{dx}} \cdot \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx.$$

$$\text{Полагая } u_n = q_2 \frac{x}{l} \quad (\text{дискретизация}), \quad v_n = \frac{x}{l}, w_n = \frac{x}{l} \quad \text{получим}$$

$$a'(u_n, v_n, w_n) = \frac{EF e^{-\alpha \frac{q_2}{l}}}{l}.$$

Выполнив сначала дискретизацию, получим $a(u_n, v_n) = RF\left(1 - e^{-\alpha \frac{q_2}{l}}\right)$

Продифференцировав по q_2 , получим то же выражение для $a'(u_n, v_n, w_n)$.

2.7 Решение систем нелинейных уравнений

Все методы, рассматриваемые ниже, основаны на линеаризации нелинейных уравнений, т.е. поиск решения нелинейных уравнений осуществляется решением рекуррентной последовательности линейных.

Если исходные уравнения задаются алгоритмически, то имеется возможность составить алгоритм построения линеаризованных уравнений. Некоторые рассматриваемые ниже методы часто применяются для решения нелинейных задач (метод упругих решений, метод переменных параметров, метод последовательных нагружений).

Некоторые из них сравнительно мало известны (метод последовательных жесткостей), хотя в ряде случаев достаточно эффективны. Для каждого метода приводится схема процесса приближений, физический смысл, приложение этой схемы к разрешающим уравнениям МКЭ, геометрическая интерпретация процесса приближений для одномерного случая. Доказательства сходимости (а для метода последовательных нагружений – оценка погрешности) приводятся в Приложении 1.

Метод упругих решений. Он применялся в работах многих авторов и является самым распространенным для решения физически нелинейных задач.

Схема итерационного процесса для метода упругих решений выглядит следующим образом:

$$a'(u_0, \Delta_n u, v) = (f, v) - a(u_n, v) \quad (2.39)$$

где a' – линейный оператор рассматриваемой системы, если считать, что она линейно деформируема и имеет модуль упругости E_0 ; u_{n+1}, u_n – приближенные значения разрешающей функции на $n+1$ и n этапах итерационного процесса,

$$\Delta_n = u_{n+1} - u_n, \quad u_0 = 0.$$

Для одномерного случая итерационный процесс допускает геометрическую интерпретацию (рис. 2.7).

В математике аналогом этого метода служит модифицированный метод Ньютона. В физическом смысле метод упругих решений означает итерационный поиск таких дополнительных компенсирующих

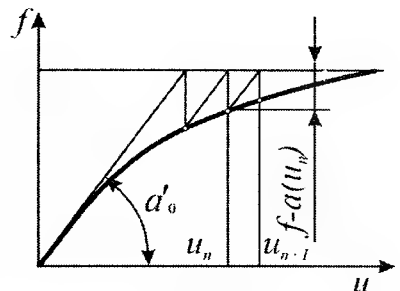


Рис. 2.7

нагрузок, которые сообщают линейно деформируемому телу перемещения, равные перемещениям нелинейного тела под заданную нагрузку. В связи с этим метод часто называют методом компенсирующих нагрузок. Жесткостные характеристики, обуславливающие оператор a' , назначаются заранее. Как правило, начальный модуль деформации E_0 , который определяет a' , назначается для состояния, когда отсутствуют напряжения и деформации, т.е.

$$E_0 = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} \sigma_i(\varepsilon_i = 0).$$

Метод переменных параметров. Считается, что для задач строительной механики этот метод был впервые предложен Биргером. В математике он известен как метод секущих. Применяется, если функционал $a(u, v)$ можно записать в виде

$$a(u, v) = b(u, u, v),$$

где $b(u, u, v)$ линеен по второму и третьему переменным.

Схема итерационного процесса имеет вид:

$$b(u_n, u_{n+1}, v) = (f, v) \quad (2.40)$$

Для одномерного случая итерационный процесс (2.40) допускает геометрическую интерпретацию (рис. 2.8).

В физическом смысле метод переменных параметров означает итерационный поиск такой линейно упругой системы (линейный оператор b_n соответствует модулю E_n , который, естественно, переменен по области Ω), которая под заданную нагрузку f имеет такие же перемещения, как и нелинейно деформируемая система (нелинейный оператор a). Начальный линейный оператор b_0

$$\text{соответствует } \frac{\sigma_{i0}}{\varepsilon_{i0}} = \left. \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} \right|_{\varepsilon_i=0} = 0.$$

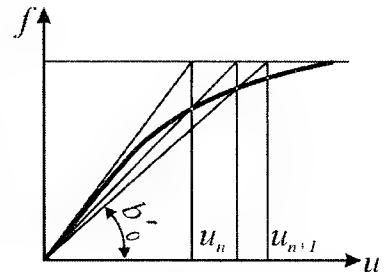


Рис.2.8

Метод касательных модулей. Метод имеет следующую вычислительную схему:

$$a'(u_n, \Delta_n u, v) = (f, v) - a(u_n, v) \quad (2.41)$$

Математическим аналогом метода касательных модулей является метод Ньютона-Рафсона-Канторовича. Для одномерного случая итерационный процесс (2.41) допускает геометрическую интерпретацию (рис. 2.9).

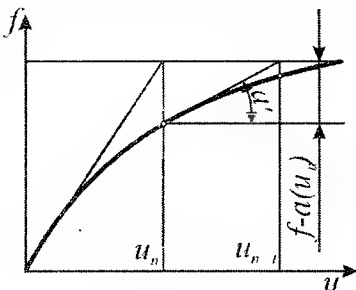


Рис. 2.9

Шаговые методы. Многочисленные модификации шаговых методов единообразно укладываются в схему известного в прикладной математике метода дифференцирования по параметру [методы продолжения] (об истории вопроса этих очень распространенных методов достаточно полно написано в работе [2.24]). Впервые этот метод для численного решения систем нелинейных уравнений был применен, по-видимому, в [2.25]. В [2.26] метод дифференцирования по параметру применен к широкому классу задач, в том числе и для решения систем нелинейных уравнений. В ряде более поздних работ [2.28, 2.29, 2.30] эти методы были снабжены четким физическим смыслом, что обусловило их широкое распространение при решении различных нелинейных задач механики.

Метод последовательных жесткостей. Метод заключается в том, что на основе нелинейного оператора задачи A образуется нелинейный оператор tA таким образом, чтобы при $t=1$, $tA=A$. Процесс начинается с того, что находится значение, для которого можно решить систему $t_0 Au^{(0)} = f$. Дальнейший расчет производится поэтапным изменением t от t_0 до 1. Вычислительная схема имеет вид:

$$t_{n+1} a'(u_0, \Delta_n u, v) = (f, v) - t_n a(u_n, v) \quad (2.42)$$

Процесс продолжается до тех пор, пока t не станет равным 1. Величины Δt необходимо принимать такими, чтобы пренебрежение высшими степенями $\Delta u_{n+1}^i (i > 1)$ не превышало заданную точность решения задачи. В физическом смысле этот процесс можно трактовать как постепенное изменение жесткости системы. Сначала жесткость системы назначается настолько большой ($t_0 \gg 1$), чтобы под заданную нагрузку f работа системы была близка к линейной, тогда u_0 найдется из уравнения $t_0 a'(u_0, \Delta_0 u, v) = (f, v)$.

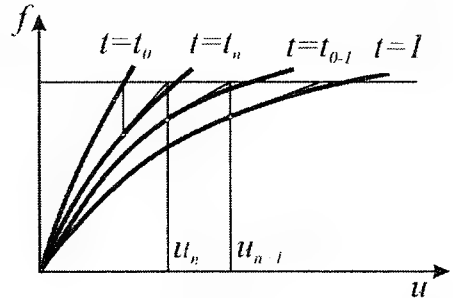


Рис. 2.10

Для одномерного случая итерационный процесс (2.42) допускает геометрическую интерпретацию (рис. 2.10).

Простая модификация метода последовательных нагружений. Она имеет следующую вычислительную схему:

$$a'(u_n, \Delta_n u, v) = \Delta_n \theta(f, v) \quad (2.43)$$

где θ – набор коэффициентов к нагрузке, изменяющихся от 0 до 1.

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{N-1} < \dots < \theta_N = 1.$$

В физическом смысле этот процесс можно трактовать как постепенное увеличение нагрузки, начинающееся от 0 и заканчивающееся заданным f .

Геометрическая интерпретация для одномерного случая представлена на рис. 2.11.

Метод последовательных нагружений с учетом нагрузочных невязок. Этот метод имеет следующую вычислительную схему:

$$a'(u_n, \Delta_n u, v) = \theta_{n+1}(f, v) - a(u_n, v) \quad (2.44)$$

Геометрическая интерпретация метода для одномерного случая приведена на рис. 2.12.

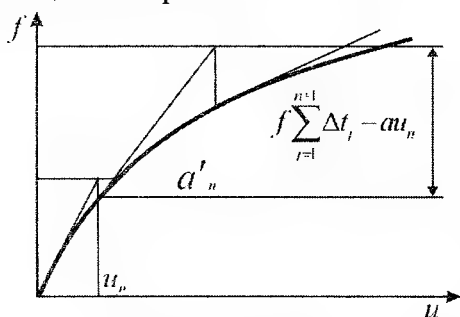


Рис. 2.12

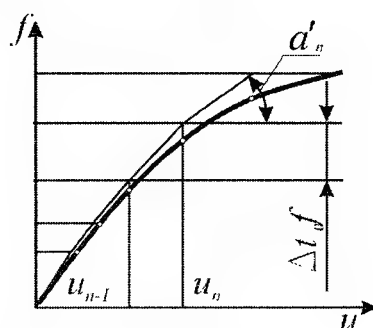


Рис. 2.11

Другие модификации шаговых методов.

Большинство модификаций шаговых методов связано с уточнением решения на каждом или на последующих шагах. Для этого используется комбинация простого (или с учетом невязки) метода Ньютона (метод касательных модулей) или модифицированным методом Ньютона (метод упругих решений).

В работе [2.7] кроме всех выше рассмотренных методов, для которых производится геометрическая и физическая интерпретация, доказательства сходимости и рассмотрение условий обеспечивающих сходимость, оценка погрешности, обсуждается также достаточно эффективный метод одного параметра, использующий идеи метода скорейшего спуска, однако не находящий широкого применения ввиду трудностей реализации. Вместе с тем, шаговые методы нашли очень широкое применение, и это, наряду с достаточно легкой реализацией объясняется также возможностью организации компьютерного моделирования процесса нагружения (2.43), (2.44) или процесса изменения напряженно-деформированного состояния конструкции во времени (2.42), вызванного такими факторами как ползучесть.

Конечно-элементная реализация. Элементы k_{ij} линеаризованных матриц жесткости для перечисленных методов вычисляются по формулам

$$k_{ij} = a'(u_{nh}, \varphi_i, \varphi_j) \quad (2.45)$$

где u_{nh} — решение, полученное на предыдущем шаге.

Элементы векторов правых частей (приведение местной нагрузки к узловой f_j и отпоров a_j) вычисляется по формулам

$$f_j = (f, \varphi_j), \quad a_j = a(u_{nh}, \varphi_j) \quad (2.46)$$

Рассмотренные методы, конечно, очень условно можно разделить на два класса: итерационные и прямые. К первым можно отнести первые три метода. Их характерная черта - известна точность решения, которая задается, но неизвестно количество вычислений (итераций), которые понадобятся, чтобы достичь заданную точность. Последние четыре (модификации шаговых) можно назвать прямыми, так как, заранее известно количество вычислений, но неизвестно, какая будет достигнута точность.

Определение области применения того или иного метода зависит от целого ряда причин. Линеаризация уравнений, по сути, включает две процедуры: процедура A (2.45) – составление линеаризованной матрицы жесткости всей системы по результатам предыдущего этапа, процедура B (2.46) – определение отпора нелинейной системы, который соответствует перемещениям, найденным на предыдущем этапе. Рассмотренные методы включают либо одну из этих двух процедур, либо обе. Поэтому использование того или иного метода будет обусловлено трудоемкостью алгоритмизации и быстродействием той или иной процедуры (это зависит от нелинейного оператора задачи, вида конечных элементов, внешней нагрузки и т.п.).

При необходимости только решения нелинейной задачи, т.е. определения напряженно-деформированного состояния, соответствующего заданной нагрузке, предпочтение следует отдавать итерационным методам. При этом если затруднена процедура A , то нужно использовать метод упругих решений, если затруднена процедура B – метод переменных параметров, если же обе процедуры реализуются достаточно просто – метод касательных модулей (случай, где этот метод не сходится, обсуждаются в разделе 2.9).

При необходимости проведения математического моделирования процесса нагружения используются шаговые методы. Все они предусматривают обязательное применение процедуры A . Если реализация процедуры B затруднена, нужно использовать простую модификацию метода последовательных нагружений. Если же доступна реализация обеих процедур, следует использовать метод последовательных нагружений с уточнением нагрузочной невязки для моделирования процесса нагружения либо метод последовательных жесткостей для моделирования изменения состояния конструкции во времени. В дальнейшем при рассмотрении различных типов нелинейных задач будет обсуждаться целесообразность применения того или иного метода решения нелинейных уравнений.

2.8 Физическая нелинейность

Нелинейность дифференциальных разрешающих уравнений МКЭ обусловлена нелинейной зависимостью $\sigma = \sigma(\varepsilon)$. Здесь рассматривается физическая нелинейность в рамках нелинейной теории упругости.

Процедуру решения физически нелинейной задачи на основе вышеизложенных методов покажем на простом примере (рис. 2.13).

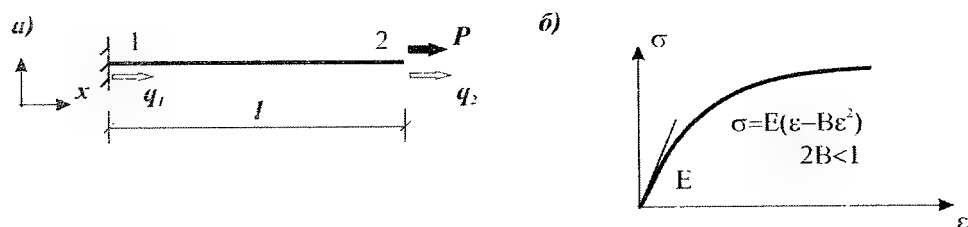


Рис. 2.13

Рассматривается стержень площадью поперечного сечения F с зависимостью $\sigma(\varepsilon) = E(\varepsilon - B\varepsilon^2)$, $0 < 2B < 1$. Левый конец стержня закреплен. К правому концу стержня (узел 2) приложена сосредоточенная сила P . Решая эту задачу на основе МКЭ, введем два узловых неизвестных q_1, q_2 (линейные перемещения узла 1 и 2).

Для аппроксимации перемещений u_x используем линейные базисные функции X_1 и X_2 , т.е.

$$u_x = \frac{l-x}{l} q_1 + \frac{x}{l} q_2.$$

Если левый конец стержня закреплен, а к правому приложена сосредоточенная сила P , то действительное u и возможное v перемещения представляются в виде

$$u_x = q_2 \frac{x}{L}, \quad v(x) = \frac{x}{L}, \quad \text{тогда } \varepsilon(u) = \frac{q_2}{l}, \quad \varepsilon(v) = \frac{1}{l}.$$

Функционал возможной работы внутренних сил имеет вид:

$$a(u, v) = F \int_0^l \sigma\left(\frac{q_2}{l}\right) \cdot \frac{1}{l} dx = F \sigma\left(\frac{q_2}{l}\right), \text{ нелинейное уравнение МКЭ тогда записывается}$$

$$F \sigma\left(\frac{q_2}{l}\right) + P = 0$$

В случае зависимости $\sigma(\varepsilon) = E(\varepsilon - B\varepsilon^2)$ ($2B < 1$) получаем уравнение относительно

$$q_2: \frac{EF}{l} \left(q_2 - \frac{B}{l} q_2^2 \right) + P = 0$$

Производная по q_2 , соответствующая функционалу $a'(u, v, w)$, имеет вид

$$a'(u, v, w) = \frac{EF}{l} \left(1 - 2 \frac{B}{l} q_2 \right) + P = 0$$

Таким образом, на основе МКЭ нелинейная задача сводится к решению нелинейного алгебраического уравнения (системе нелинейных уравнений). Если зависимость $\sigma(\varepsilon)$ представляется в трансцендентном виде, например, $\sigma(\varepsilon) = R(1 - e^{a\varepsilon})$, то на основе МКЭ получим систему трансцендентных уравнений, для данного случая:

$$RF \left(1 - e^{a \left(\frac{q_2}{l} \right)} \right) + P = 0.$$

При решении нелинейных алгебраических (трансцендентных) уравнений методом, основанным на линеаризации (см. Раздел 2.7), используются производные по q , соответствующие функционалу $a'(u, v, w)$, для рассматриваемого случая

$$a'(u, v, w) = \frac{EF}{l} \left(1 - 2 \frac{B}{l} q_2 \right)$$

Для шагового метода линеаризованное уравнение на n шаге имеет вид

$$\frac{EF}{l} \left(1 - 2 \frac{B}{l} q_{2,n} \right) \Delta_n q_2 = \Delta_n P; \text{ где } \frac{EF}{l} \left(1 - 2 \frac{B}{l} q_{2,n} \right) - \text{линеаризованный член}$$

матрицы канонических уравнений, так как $q_{2,n}$ – известно из предыдущего шага расчета, $\Delta_n q_2$ – искомое приращение q_2 на n шаге, $\Delta_n P$ – приращение нагрузки. Для следующего $n+1$ шага q_2 определяется по формуле $q_{2,n+1} = q_{2,n} + \Delta q_{2,n}$.

В рассмотренном выше примере функция $\sigma(\varepsilon)$ непрерывно дифференцируема, в таких случаях применение шагового метода, как правило, дает хорошие результаты. При кусочно-линейной функции $\sigma(\varepsilon)$ (например, диаграмма Прандтля) целесообразно применять модифицированный метод Ньютона. Здесь для наглядности применения МКЭ к физически нелинейным задачам было рассмотрено на примере стержня. Более сложные случаи для пластинчатых систем рассмотрены в Приложении 1.

2.9 Геометрическая нелинейность

В геометрически нелинейных задачах нелинейной является зависимость между перемещениями и деформациями, кроме того, при применении принципа возможных перемещений необходимо учитывать изменение геометрии. Например, для сжатого (растянутого) стержня используется зависимость

$$\varepsilon(u) = u'_x + \frac{1}{2} (u'_z)^2 \quad (2.47)$$

Функционал возможной работы $a(u, v)$ имеет вид

$$a(u, v) = \int_0^l \left[EF \left(u'_x + \frac{1}{2} (u'_z)^2 \right) (v'_x + u'_z v'_z) \right] dx \quad (2.48)$$

для его производной получим

$$a'(u, v, w) = \int_0^l EF (v'_x + u'_z v'_z) (w'_x + u'_z w'_z) dx + \int_0^l N v'_z w'_z dx \quad (2.49)$$

$$\text{где } N = EF \left(u'_x + \frac{1}{2} (u'_z)^2 \right)$$

При учете изгибных деформаций выражения (2.47, 2.48, 2.49) примут вид:

$$\varepsilon(u) = u'_x + \frac{1}{2} (u'_z)^2 - u''_z \quad (2.47a)$$

$$a(u, v) = \int_0^l \left[EF \left(u'_x + \frac{1}{2} (u'_z)^2 \right) (v'_x + u'_z v'_z) + EI u''_z v''_z \right] dx \quad (2.48a)$$

$$a'(u, v, w) = \int_0^l EF (v'_x + u'_z v'_z) (w'_x + u'_z w'_z) dx + \int_0^l N v'_z w'_z dx + \int_0^l EI v''_z w''_z dx \quad (2.49a)$$

где u_x — перемещение вдоль оси стержня;

u_z — перемещение ортогональное оси стержня;

z — расстояние от нейтральной оси стержня до рассматриваемого волокна;

$$u''_z = \frac{du_z^2}{dx^2} \text{ — деформация кривизны.}$$

Рассмотрим простейший пример (рис. 2.14) – шарнирный растянутый стержень в геометрически нелинейной постановке

Система имеет одно узловое неизвестное – вертикальное перемещение, поэтому $u_x=0$ и из (2.47) следует, что $\varepsilon = \frac{1}{2}(u'_z)^2$.

Решая эту задачу на основе МКЭ перемещения u_z представляем в виде:

$$u_z(x) = x_2 q_2 = \frac{x}{l} q_2, \text{ а}$$

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{q_2}{l} \right)^2, \quad \varepsilon(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l} \right)^2$$

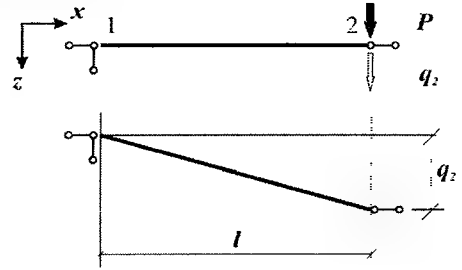


Рис. 2.14

Функционал возможной работы внутренних сил:

$$a(u, v) = \int_0^l EF \frac{1}{2} \left(\frac{q_2}{l} \right)^2 \cdot \frac{q_2}{l} \cdot \frac{1}{l} dx = EF \frac{1}{2} \left(\frac{q_2}{l} \right)^2$$

Нелинейное уравнение МКЭ тогда записывается следующим образом:

$$\frac{1}{2} EF \left(\frac{q_2}{l} \right)^2 \frac{q_2}{l} + P = 0$$

Производная по q_2 соответствующая

$a'(u, v, w)$ вычисляется по формуле:

$$a'(u, v, w) = \frac{EF}{l} \left(\frac{q_2}{l} \right)^2 + \frac{N}{l}, \quad N = \frac{1}{2} EF \left(\frac{q_2}{l} \right)^2$$

Для простой модификации шагового метода на n шаге линейризованное уравнение (2.43) имеет вид

$$\left(\frac{EF}{l^3} q_{2,n}^2 + \frac{N_n}{l} \right) \Delta_n q_2 = \Delta_n P \quad \text{и} \quad N_n = \frac{1}{2} EF \left(\frac{q_{2,n}}{l} \right)^2$$

где $q_{2,n}$ – значение узлового неизвестного, найденное на n шаге. Значение $q_{2,n+1}$ находится по формуле $q_{2,n+1} = q_{2,n} + \Delta_n q_2$.

Здесь, как и для физической нелинейности рассмотрена простейшая задача для стержней. Общие постановки физически и геометрически нелинейных задач, включая пластинчатые и трехмерные элементы, даны в Приложении 1.

Существует достаточно распространенное мнение, что метод Ньютона-Рафсона (2.41) наиболее эффективен и позволяет решать нелинейные задачи с наименьшим количеством вычислений. Ниже на простейшем примере покажем, что в ряде часто встречающихся на практике случаев применение этого метода не приводит к нужному результату.

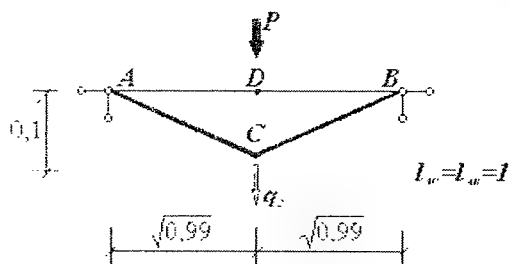


Рис. 2.15

Рассмотрим задачу расчета стержня в физически и геометрически нелинейной постановке (рис. 2.15).

Длины отрезков AC и BC равны 1, начальное провисание CD – 0.1 м. точки A и B закреплены, точка C вследствие симметрии имеет только вертикальное перемещение u_z ,

значение которого для упрощения преобразований отсчитывается от точки D, т.е. начальное значение перемещения $u_{z,0}=0,1$.

Обозначим $l(u_z)$ длину деформированного отрезка нити, $l(u_z) = 0,99 + u_z^2$, тогда деформация нити $\varepsilon = l(u_z) - 1$.

Нелинейную зависимость между напряжениями σ и деформациями примем в виде (рис. 2.16)

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon & \text{при } \varepsilon < \varepsilon_1 \\ 0,01E(1 + \varepsilon) & \text{при } \varepsilon_1 < \varepsilon \end{cases}$$

В точке C действует вниз сила $P=0,002EF$, где F – площадь сечения нити.

Продольное усилие в отрезках нити AC и BC равно $N = F\sigma(\varepsilon(u_z))$.

Проектируя его на вертикальную ось, получим уравнение равновесия

$$2N \frac{u_z}{l(u_z)} = P, \text{ откуда, сократив на } 2EF,$$

$$\text{находим } \sigma(\varepsilon(u_z)) \frac{u_z}{l(u_z)} = 0,001.$$

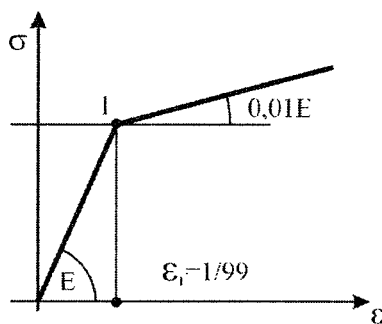


Рис. 2.16

Для построения уравнения методом Ньютона вычислим производную функции

$$f(u_z) = \sigma(\varepsilon(u_z)) \frac{u_z}{l(u_z)}.$$

Поскольку $l'(u_z) = \varepsilon'(u_z) = \frac{u_z}{l(u_z)}$, получим

$$f'(u_z) = \sigma'(\varepsilon(u_z)) \varepsilon'(u_z) + \sigma(\varepsilon(u_z)) \left(\frac{u_z}{l(u_z)} \right)' = \sigma'(\varepsilon(u_z)) \frac{u_z^2}{l^2(u_z)} + \sigma(\varepsilon(u_z)) \frac{0,99}{l^3(u_z)}$$

При $u_z = u_{z,0} = 0,1$, имеем $\varepsilon(u_{z,0}) = 0$, $\sigma(\varepsilon(u_{z,0})) = \tau_{(0)} = 0$, $\tau'_{(0)} = 1$, следовательно $f(u_{z,0}) = 0$, $f'(u_{z,0}) = 0,01$.

Применяя метод Ньютона или модифицированный метод Ньютона, получим $f'(u_{z,0})(u_{z,1} - u_{z,0}) = 0,001$, откуда $(u_{z,1} - u_{z,0}) = 0,01$, $u_{z,1} = 0,2$.

На следующем шаге имеем $l(u_{z,1}) = l(0,2) = 1,03$, $\varepsilon(u_{z,1}) = 1,03 - 1 > 1_{99}$.

Поэтому

$$\sigma(\varepsilon(u_z)) = \sigma(\varepsilon(0,2)) = 0,01 \cdot l(0,2), f(u_z) = 0,01 \cdot u_{z,1} = 0,002, \sigma(\varepsilon(u_{z,1})) = 0,01,$$

$$f'(u_{z,1}) = 0,01 \frac{(u_{z,1})^2}{l^2(u_{z,1})} + 0,01 \frac{0,99}{l^3(u_{z,1})} = 0,01$$

Таким образом, $f'(u_{z,1}) = f'(u_{z,0})$, поэтому уравнения метода Ньютона и модифицированного метода Ньютона для второго шага совпадают.

Получим

$$0,01(u_{z,2} - u_{z,1}) = 0,001 - \sigma(\varepsilon(u_{z,1})) = -0,001, \text{ следовательно}$$

$u_{z,2} - u_{z,1} = -0,1$ и $u_{z,2} = 0,1 = u_{z,0}$, т.е. после второй интеграции метод заиклился.

Таким образом, для рассмотренной задачи метод Ньютона и модифицированный метод Ньютона не могут привести к решению. Применение же шагового метода позволяет решить указанную задачу.

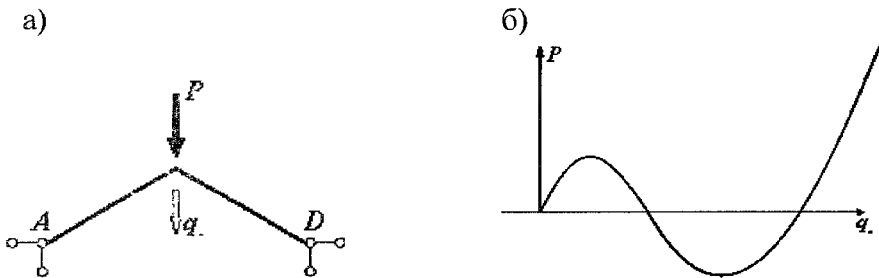


Рис.2.17

Если рассмотреть схему, представленную на рис. 2.17 а (ферма Мизеса, по сути относительно горизонтальной оси она зеркальна схеме на рис. 2.16), то для нее зависимость между силой P и перемещением q_2 будет иметь вид представленный на рис. 2.17 б и для решения этой задачи шаговый метод не приведет к решению. В [2.23] предложен метод, который для систем с несколькими неизвестными дает возможность решать задачи такого класса (когда имеется нисходящая ветвь). Тем не менее, пока вопрос о решении реальных задач остается открытым.

2.10 Устойчивость

Задачи устойчивости тесно связаны с геометрически нелинейными задачами.

Конструкция устойчива при перемещении u , если справедливо условие [2.22] положительной определенности (2.37). При применении шагового метода условие (2.37) означает положительную определенность матрицы линеаризованной системы уравнений.

Условием положительной определенности симметричной матрицы является, согласно критерию Сильвестра, положительность всех ее главных миноров, что проверяется в ходе исключения неизвестных методом Гаусса. Такой подход позволяет исследовать устойчивость и при учете в геометрической нелинейной и физической нелинейности одновременно.

Изложенный метод исследования устойчивости называют устойчивостью деформированной схемы.

Для многих задач достаточно исследовать устойчивость недеформированной схемы. В этом случае в выражении (2.49а) для стержня пренебрегают слагаемыми $u'_z v'_z$ и $u'_z w'_z$, которые и определяют деформированное положение. Величины продольных сил N находятся из решения линейной статической задачи. Требуется отыскать наименьшее положительное число λ - коэффициент запаса, при котором функционал

$$\alpha_\lambda(v, w) = \int_0^L (EF v'_x w'_x + EJ v'_z w'_z) dx + \lambda \int_0^L N v'_z w'_z dx = 0, \quad (2.50)$$

перестает быть положительно определенным.

Функция v , удовлетворяющая при всех w равенству $\alpha_\lambda(v, w) = 0$, называется первой формой потери устойчивости.

Она удовлетворяет известному дифференциальному уравнению $EJ v''_z - \lambda N v''_z = 0$.

Таким образом, задача устойчивости недеформированной схемы – это задача на собственные значения. Применение МКЭ сводит дифференциальную задачу к задаче на собственные значения для матриц $k v + \lambda k_N v = 0$,

где k - матрица жесткости, соответствующая для стержня функционалу

$$\alpha_0(v, w) = \int_0^L (EF v'_x w'_x + EJ v''_z w''_z) dx_1, \quad \text{матрица } k_N \text{ соответствует}$$

функционалу

$$\alpha_N(v, w) = \int_0^L v'_z w'_z dx_1, \quad \text{ее называют геометрической матрицей}$$

жесткости.

Выше рассматривалась задача устойчивости для стержней. Для пластинчатых систем (оболочки) эта задача рассмотрена в Приложении 1.

Выше в разделе 2.4 уже отмечалось, что МКЭ при использовании базисных функций типа $X_1; X_2$ (2.23) и X_3-X_6 (2.24) дает точное решение только для дифференциального оператора A типа $EF \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$ и $EF \frac{\partial^4 u_x}{\partial x^4}$.

В остальных случаях (наличие упругого основания, предварительного натяжения, физической и геометрической нелинейности) МКЭ дает приближенное решение и для уточнения решения необходимо сгущать сетку (дробить стержень между основными узлами схемы, т.е. вводить промежуточные узлы). Такой подход необходимо использовать для задач устойчивости. Так при решении задачи устойчивости стержня (рис. 2.18) с использованием МКЭ необходимо вводить промежуточные узлы.

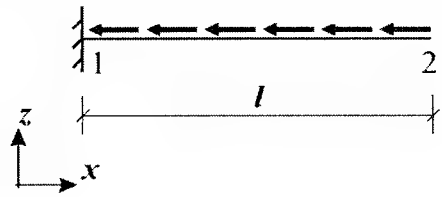


Рис. 2.18

Задача подобного типа дана как верификационный пример в Приложении 2, там же приводится ряд задач устойчивости для пластинчатых систем.

2.11 Односторонние связи. Трение

Задачи с односторонними связями, как правило, описываются кусочно-линейными зависимостями $\sigma(\varepsilon)$.

В этом смысле задачи с односторонними связями примыкают к физически-нелинейным задачам, с той лишь разницей, что нелинейность обусловлена не свойствами материала, а конструктивными особенностями, т.е. конструктивной нелинейностью.

Наиболее простые и вместе с тем наиболее характерные зависимости $\sigma(\varepsilon)$ представлены на рис. 2.19.

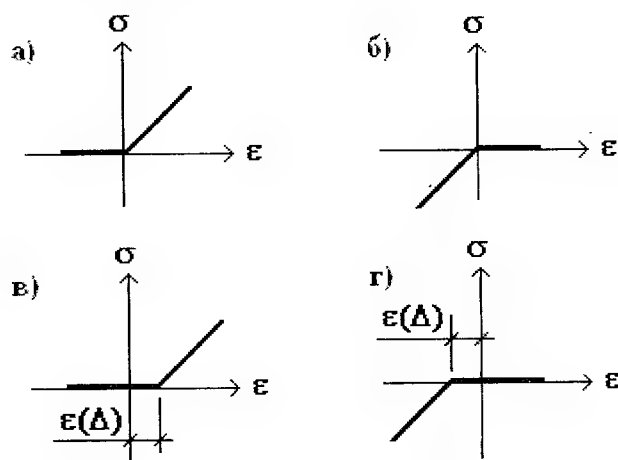


Рис. 2.19

а) связь, работающая только на растяжение (подвеска);

б) связь, работающая только на сжатие (подпорка);

в) связь, работающая только на растяжение после «выборки» зазора Δ (невесомая провисшая ванта).

г) связь, работающая только на сжатие после «выборки» зазора Δ (часть фундамента, имеющая зазор между подошвой и грунтовым основанием).

Характерной особенностью таких зависимостей (аналогично диаграмме Прандтля) является наличие разрыва производной $\sigma'(\varepsilon)$ в точках перелома. В связи с этим шаговый метод здесь неприменим.

Для решения подобных задач часто используется метод Рабиновича (аналог метода секущих, см. Раздел 2.7).

Однако можно привести много задач (например, [2.33]), когда этот алгоритм заклинивается или приводит к расчету геометрически изменяемой системы, т.е. не приводит к искомому результату.

Универсальный метод решения задач* с односторонними связями описан в Приложении 1, а в Приложении 2 приведены примеры решения задач с односторонними связями, в том числе и тех, для которых метод Рабиновича не сходится.

При решении большинства задач с односторонними связями имеется простой метод проверки правильности полученного решения: «правильно» работающие односторонние связи сохраняются, «неправильно» работающие – удаляются и решается линейная задача. Результаты расчета обеих схем должны совпадать.

* Этот метод реализован в ПК ЛИРА и позволяет рассчитывать все без исключения конструкции с односторонними связями, в том числе и те, для которых метод Рабиновича расходится.

Однако имеется простой, но трудно объяснимый пример, демонстрирующий, что эта проверка работает не всегда. В изображенной на рисунке 2.20 системе вертикальные и горизонтальные стержни – линейные. Элемент 2–3 работает только на сжатие, элемент 1–4 – только на растяжение.

Под действием вертикальной нагрузки предложенный алгоритм покажет отклонение системы влево, обе односторонние связи при этом выключаются из работы. Однако после их удаления горизонтальных перемещений, естественно, не будет.

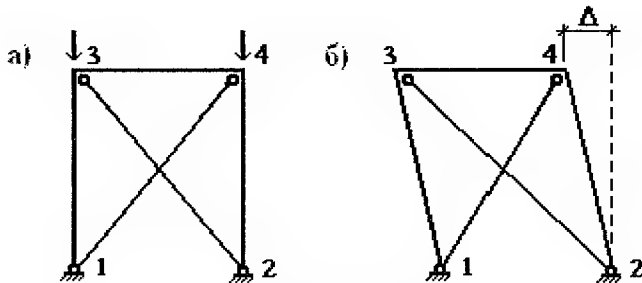


Рис. 2.20

По физической трактовке, математической формулировке и методам решения к задачам с односторонними связями непосредственно примыкают задачи трения и сыпучих сред.

Закон трения Кулона записывается в виде

$$\sigma_{\tau} \leq -k \sigma_n, \quad (2.51)$$

где σ_{τ} и σ_n – напряжения по касательной и нормали к поверхности (или линии) трения, k – коэффициент трения и сыпучих сред.

Для сыпучих сред применяются различные условия, например, условие Кулона–Мора, которое в двумерном случае имеет вид:

$$\sigma_{\tau} \leq -\sin \varphi \sigma_0 + c \cdot \cos \varphi, \quad (2.52)$$

где σ_0 – среднее напряжение, φ – угол внутреннего трения, c – сцепление.

В Приложении 1 дана математическая постановка задач трения и сыпучих сред, приведены условия существования и единственности решения, а также предложены и обоснованы приближенные методы решения этих нелинейных задач.

В литературе, посвященной анализу методов расчета строительных конструкций (например, [2.33]), высказывается мнение, что задачи упругости с трением исключительно сложны для строгого математического исследования. В подтверждение цитируется работа [2.34], в которой приведена задача с трением, имеющая неединственное решение. Отсюда делается вывод об отсутствии промышленных программ, решающих задачи с односторонними связями и трением, которые можно рекомендовать к широкому применению.

Подобного рода рассуждения способны ввести в заблуждение, как пользователей программной продукции, так и разработчиков.

На самом деле все обстоит гораздо сложнее:

во-первых, пример приводимый в [2.34] очень неестественен, так как предполагает наличие конструктивного элемента, у которого диагональный член матрицы жесткости меньше побочного,

во-вторых, в работах [2.35, 2.36] доказаны условия существования и единственности решения для задач с трением.

В эти условия входят геометрическая неизменяемость системы при отсутствии связей с трением, фиксация последовательности приложения нагрузки, постоянство значения нормального напряжения σ_n на поверхности контакта. Последнее условие является достаточно жестким. Однако, доказательства [2.35, 2.36] не используют ряд свойств, характерных для реальных задач. Поэтому мы надеемся, что доказательство единственности будет получено и без последнего ограничения.

2.12 Динамика

Так как основным инструментом для решения задач механики в излагаемом материале выбран метод конечных элементов, основанный на вариационном принципе возможных перемещений, то задачу динамики сформулируем в виде

$$b(u'', v) + a(u', v) + f(t, v) = 0 \quad (2.53)$$

где $b(u'', v)$ — возможная работа инерционных сил;

$a(u', v)$ — возможная работа сил трения (демпфер);

$a(u, v), f(t, v)$ — аналогично статической задаче возможные работы внутренних и внешних сил.

Перемещения u и внешняя сила f зависят от времени t .

Уравнению (2.53) сопутствуют начальные условия $u(0)=u^0$, $u'(0)=u^1$ или условия периодичности $u(0)=u(T)$, $u'(0)=u'(T)$,

где $u(T)$ и u^1 — заданные функции;

T — период изменения внешней нагрузки.

Небольшое, но интересное отступление.

Положим в уравнении (2.53) $v=u'$, и воспользуемся очевидными равенствами

$$b(u'', u') = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} b(u', u'), \quad a(u, u') = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u, u),$$

где $\frac{1}{2} b(u', u')$ и $\frac{1}{2} a(u, u)$ — кинетическая и потенциальные энергии системы.

Обозначив через $\Pi(u) = \frac{1}{2}[b(u', u') + a(u, u)]$ полную энергию, получим уравнение энергетического баланса (2.37)

$$\frac{d}{dt}\Pi(u) + c(u', u') + f(t, u') = 0. \quad (2.54)$$

Из уравнения энергетического баланса следует ряд очевидных с точки физического понимания задачи выводов:

В отсутствии сил трения ($c(u', u')$) уравнение (2.54) означает, что производная по времени полной энергии равна мощности внешних сил.

При отсутствии сил трения и внешних сил производная полной энергии равна нулю, следовательно, полная энергия постоянна, что соответствует незатухающим свободным колебаниям.

При отсутствии внешней нагрузки и наличии трения производная полной энергии отрицательна, т.е. колебания затухают.

При периодических граничных условиях получаем $\pi(u) = \pi(T)$, поэтому, проинтегрировав равенство (2.54) по t от 0 до T , получим, что

$$\int_0^T c(u', u') dt + \int_0^T f(t, u') dt = 0, \quad (2.55)$$

т.е. работа сил трения за период компенсируется работой внешних сил.

Из равенства (2.55) следует также ограниченность решения задачи (2.53), с условиями периодичности.

При отсутствии сил трения решение задачи с условиями периодичности может стать неограниченным – резонанс.

Эти рассуждения приведены только для того, чтобы продемонстрировать, как на основе элементарных математических преобразований можно получить очевидные (а иногда и неочевидные) с физической точки зрения результаты.

Решение уравнения (2.53) МКЭ ищем в виде

$$u_h(x, t) = d_k(t) \mu_k(x)$$

из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d_k''(t)b(\mu_k, \mu_j) + d_k(t)a(\mu_k, \mu_j) + l(t, \mu_j) = 0.$$

Одним из методов решения линейной динамической задачи является известный метод Фурье разложения по формам собственных колебаний. Тогда задача сводится для каждой формы ψ_m к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, решения, которых во многих практически важных случаях (импульс, удар, периодическая нагрузка) получены в явном виде.

Для линейных и нелинейных динамических задач с начальными условиями применяются разностные схемы. Их исследование приведено в Приложении 1 для линейных динамических задач, задач вязко-упруго-пластичности, геометрически нелинейных задач и задач с наличием односторонних связей*. При построении разностной схемы назначается шаг по времени θ и уравнения (2.53) записываются в точках $t_m = \theta m$ заменой производных разностными отношениями

$$\delta_m u = \theta^{-1}(u_{m+1} - u_m), \quad \beta_m u = (2\theta)^{-1}(u_{m+1} - u_{m-1}) \quad \text{для } u',$$

$$\gamma_m u = \theta^{-2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}), \quad \text{для } u''.$$

Из разложения в ряд Тейлора следует, что такие замены аппроксимируют исходное уравнение.

Приведем известный пример, демонстрирующий, что одного только условия аппроксимации недостаточно для того, чтобы разностная схема давала правильное решение.

Рассматривается обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка $u'(t) + au(t) = 0$, $a > 0$ с начальным условием $u(0) = 1$. Его решение $u(t) = e^{-at}$. Решение

этого уравнения можно искать по явной разностной схеме $\frac{(u_{m+1} - u_m)}{\theta + au_m} = 0$ и по неявной

$$\frac{(u_{m+1} - u_m)}{\theta + au_{m+1}} = 0.$$

При начальном условии $u_0 = 1$.

Для обеих схем получаем явные формулы:

$$u_{m+1} = q_1^{m+1}, \quad q_1 = 1 - a\theta \quad \text{— для явной схемы;}$$

$$u_{m+1} = q_2^{m+1}, \quad q_2 = 1 + a\theta \quad \text{— для неявной.}$$

Поскольку $0 < q_2 < 1$, неявная схема дает ограниченное положительное и стремящееся к нулю при $m \rightarrow \infty$ решение, что соответствует решению e^{-at} .

Для явной схемы качественно правильные результаты получаем только при $a\theta < 1$.

При $a\theta = 1$ получаем неправильный результат $u_{m+1} = 0$.

При $1 < a\theta \leq 2$ последовательность q_1^m еще ограничена, но знакопеременна, в частности, при $a\theta = 2$ получаем абсолютно неверный результат $u_m = (-1)^m$.

При $a\theta > 2$ последовательность q_1^m не только знакопеременна, но и не ограничена.

* В ПК ЛИРА реализована нелинейная динамика для односторонних связей, грунтов с условием Кулона-Мора и материалов с диаграммой Прандтля.

Таким образом, даже для простого уравнения разностную схему нельзя выбирать, исходя только из аппроксимации. Правильная разностная схема должна удовлетворять еще и условию устойчивости, т.е. ограниченности при $m \rightarrow \infty$ величин u_m и $\delta_m u$.

Приведенные в Приложении 1 разностные схемы для линейных и нелинейных задач условию устойчивости удовлетворяют. Например, разностная схема для линейной задачи без трения имеет вид

$$b(\gamma_m u, v) + a\left(\frac{u_{m+1} + u_{m-1}}{2}, v\right) + l(t_m, v) = 0.$$

Она устойчива и имеет второй порядок сходимости.

В Приложении 2 приводится ряд верификационных примеров по линейной и нелинейной динамике.

Литература к главе 2

- 2.1 Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. М.: МИР, 1975. – 541с.
- 2.2 Розин Л.А. Метод конечных элементов. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. – Л.: Энергия, 1971. – 214с.
- 2.3 Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам – М.: Стройиздат, 1977. – 132с.
- 2.4 Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. – Санкт-Петербург: Изд-во СПбГТУ, 1998. – 530с.
- 2.5 Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392с.
- 2.6 Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349с.
- 2.7 Городецкий А.С., Заварицкий В.И., Рассказов А.А., Лантух-Лященко А.И. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений. – М.: Транспорт, 1981. – 142с.
- 2.8 Михлин С.Г. Вариационные методы математической физики. – М.: Наука, 1970. – 512с.
- 2.9 Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948, – 271с.
- 2.10 Соболев Л.С. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. – Л.: Изд. ЛГУ, 1950. – 255с.
- 2.11 Михлин С.Г. О постоянных множителях в оценках погрешности вариационной сеточной аппроксимации. – В кн.: Записки научных семинаров. – Т. 80. – Л., 1978. – С. 125-166.
- 2.12 Ateeja M. Evaluation de d'erreur dans le methode des elements finis, Numer. Math., 28, 1977, N 3, p.295-306.
- 2.13 Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов. – М.: Наука, 1989.
- 2.14 Miyoshi T., Convergence of finite element solution represented by a non-conforming basis, Kumamoto Journal of Sciences (Math.), 9, N 1, p, 11-20.
- 2.15 Обэн Ж.П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. – М.: Мир, 1977. – 383с.
- 2.16 Евзеров И.Д. Оценки погрешности несовместных конечных элементов плиты. – Киев, 1979, 9с (Деп. В УкрНИИНТИ, № 1467).
- 2.17 Карпиловский В.С. Конструирование несовместных конечных элементов. – Киев, 1980, 50с (Деп. В УкрНИИНТИ, № 2153).
- 2.18 Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 342с.
- 2.19 Городецкий А.С. Численная реализация метода конечных элементов.//Сопротивление материалов и теория сооружений. Вып 20. – Киев: Будівельник, 1972. С. 75-87.

- 2.20 Евзеров И.Д., Здоренко В.С. Сходимость плоских конечных элементов тонкой оболочки.//Сопротивление материалов и теория сооружений. Вып 1. – Киев: Будівельник, 1984. С. 35-40.
- 2.21 Здоренко В.С., Городецкий А.С., Елсукова В.И., Сливкер В.И.. Применение метода конечных элементов к расчету конструкций на упругом основании с двумя коэффициентами постели.//Сопротивление материалов и теория сооружений. Вып 27. – Киев: Будівельник, 1975. С. 180-192.
- 2.22 Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз, 1967. – 984с.
- 2.23 Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация.–Эдиториал УРСС.–1999. – 224 с.
- 2.24 Ortega J.M., Rheinboldt W.C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables. Academic Press, New York and London 1970, 680 p.
- 2.25 Lahage E. Une methode de resolution d'une categorie d'equations transcendentes. C.R., 1934, v.198, p.1840-1842
- 2.26 Давыденко Д.О. Об новом методе численного решения систем нелинейных уравнений. – ДАН СССР, 1953. – Т. 83, №4. – С. 917-920.
- 2.27 Городецкий А.С. Вопросы расчета конструкций в упругопластической стадии с учетом применения ЭЦВМ в строительной механике // Труды первого всесоюзного совещания по применению ЭЦВМ в строительной механике (г. Ленинград, 1963г.). – Ленинград: Издательство литературы по строительству, 1966. – С.169-175.
- 2.28 Феодосьев В.И. Применение шагового метода к анализу устойчивости сжатого стержня. – Прикладная математика, 1963, №2. – С. 265-274.
- 2.29 Городецкий А.С. К расчету тонкостенных железобетонных конструкций в неупругой стадии.//Сборник трудов НИИСК «Строительные конструкции». – К.:Будівельник, 1965. Вып.6 – С.86-93.
- 2.30 Гаевский Х, Греггер К, Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336с.
- 2.31 Скрыпник И.В. нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. – Киев: Наукова думка, 1973. – 217с.
- 2.32 Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 742с.
- 2.33 Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – Киев: ВПП КОМПАС. – 446с.

- 2.34 Вовкушевский А.В., Шойхет Б.А. Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов. – М.: Энергия, 1971. – 136с.
- 2.35 Duvaut G., Lions S.– L. Elasticite avec frottement. – J. de Mecanique, 1971
- 2.36 Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 742с.
- 2.37 Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1969. – 407с.
- 2.38 Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512с.

Глава 3 Компьютерная реализация

3.1 Интуитивная графическая среда пользователя

Материал, приведенный в этом разделе, ориентирован на разработку промышленных программ.

Как указывалось в разделе 1.4, существует несколько сотен программ, реализующих МКЭ. Однако большинство из них носит «индивидуальный характер» т.е., разработаны для решения той или иной конкретной задачи и, как правило, используются только разработчиками. Очень часто при задании исходных данных для таких программ необходимо владеть приемами программирования. Несмотря на узкую область применения, значение таких программ трудно переоценить, так как в них зачастую оттачиваются методы и алгоритмы, которые в дальнейшем берут на вооружение разработчики промышленных программ.

Промышленные программы ориентированы на массовое применение и, как правило, пользователю необходимы знания только в предметной области. Конечно, включить компьютер, пользоваться мышью, организовать и запомнить файл и т.п. он должен уметь. Трудоемкость и стоимость разработки промышленных программ на много порядков выше, чем «индивидуальных» программ. Технология разработки промышленных программ, равно как и реализация отдельных алгоритмов являются передовыми технологиями и их несанкционированное заимствование в цивилизованных странах преследуется по закону, а судебные разбирательства по этим поводам часто заканчиваются крахом отдельных фирм.

Вот далеко не полный перечень функций, приемов, возможностей, характеризующий промышленные программы:

- визуализация расчетных схем на всех этапах ее синтеза и анализа
- диагностика ошибок
- наличие подробной инструкции
- наличие контекстных подсказок, исключающих возникновение для пользователя непреодолимых ситуаций
- наличие многочисленных и многовариантных приемов создания модели (фильтры, маркеры, дескрипторы, навигация, многоязычность, различные системы единиц измерения, построение любых сечений, масштабируемость, многооконный режим и мн. др.)
- наличие многочисленных приемов анализа результатов (построение изополей, изолиний напряжений, перемещений, усилий, анимация колебаний, построение деформированных схем, цифровая и цветовая индикация элементов и их атрибутов, регулируемый масштаб изображения)

- идентификация прохождения задачи в процессоре
- наличие развитой системы документирования

Реализация всех этих функций выполняется в рамках пользовательского интерфейса. На ранних стадиях реализации, на персональных компьютерах пользовательский интерфейс разделяли на препроцессор (синтез расчетных схем) и постпроцессор (анализ результатов). В настоящее время этот устаревший принцип заменяется организацией пользовательского интерфейса в виде *единой интуитивной графической* среды пользователя. В программном комплексе ЛИРА пользовательский интерфейс организован именно по этому принципу. Рассматриваемые в дальнейшем необходимые и возможные функции пользовательского интерфейса также во многом присущи ПК ЛИРА.

Единая интуитивная графическая среда пользователя:

- *единая* – потому что пользователь, не покидая эту среду, проходит все этапы решения, от создания расчетной схемы до анализа результатов, может переключаться в любой выбранный режим и получать информацию с любого этапа, а также просматривать одновременно окна нескольких режимов (например, анализируя результат, можно параллельно просмотреть исходные данные);
- *интуитивная* – потому что интерфейс по содержанию и наполнению организован в соответствии с требованиями и объектами предметной области, а по форме реализации наследует базовый интерфейс ОС Windows, и пользователь, знакомый с этой средой, может легко взаимодействовать с компьютером, иногда даже на интуитивном уровне;
- *графическая* – потому что ведущей формой представления проекта является графическая информация (визуализация объектов в целом и их частей, отображение результатов в виде деформированных схем, эпюр, изополей, анимация динамических процессов и др.).

Ниже кратко рассматриваются общие вопросы и приемы организации пользовательского интерфейса, характерные для современных промышленных программ.

Требования к пользовательскому интерфейсу и правила его построения регламентируются соответствующими стандартами, и, прежде всего, базовым пользовательским интерфейсом операционной системы, в которой будет работать программа. Попытки отхода от принципов унификации приводят в конечном итоге к отрицательному результату, т.к. вынуждают пользователя переучиваться приемам работы с каждой такой программой. С другой стороны, фиксированная конфигурация пользовательского интерфейса не может быть оптимальной для всех, кто работает с программным продуктом. Компромиссным решением является наличие настраиваемых параметров интерфейса. Возможность настройки

позволяет пользователям самостоятельно модифицировать интерфейс, приводя его к состоянию, обеспечивающему наиболее удобные условия для взаимодействия с программой.

Интерфейс, воплощающий развитые функции настройки, называют *гибким*. Данное свойство является безусловным достоинством пользовательского интерфейса. В то же время необходимо, чтобы средства настройки не были слишком сложными и не мешали тем пользователям, которые не желают их применять. Также должна быть обеспечена возможность автоматического возврата конфигурации интерфейса к состоянию, установленному по умолчанию.

В качестве примера перечислим ряд параметров пользовательского интерфейса, которые являются настраиваемыми в ПК ЛИРА:

- панели инструментов (их состав, положение на экране, признак видимости);
- цветовая схема (цвет фона рабочего окна, цвета составных элементов и объектов расчетной схемы, палитра изополей результатов);
- вид и размер шрифтов;
- пути к базовым каталогам на диске для хранения файлов исходных данных и результатов;
- единицы измерения;
- выбранные языки интерфейса и документирования;
- параметры 3D-графики (наличие программного или аппаратного ускорения, используемые визуальные эффекты) и др.

Другим отличительным свойством современного пользовательского интерфейса является его *множественность*. Под этим понимается наличие нескольких альтернативных сценариев взаимодействия пользователя и программы, ведущих к достижению определенной цели. Так, одна и та же команда может быть исполнена с использованием строки главного меню, кнопки на панели инструментов, строки контекстного меню или набора “горячих” клавиш. Понятие множественности относится не только к интерфейсным органам управления, но также распространяется и на объекты самой предметной области промышленной программы. Например, один и тот же фрагмент многоэтажного здания может быть задан как посредством параметрического описания, так и получен в результате копирования отдельных этажей, или вообще собран из отдельных элементов. Многовариантность технологии ввода и актуализации данных, приемов доступа к объектам и их свойствам – направление, поддерживаемое большинством современных промышленных программ.

Реальные проекты содержат большой объем данных, значительная часть которых взаимосвязана и взаимозависима. Так, конечно-элементные расчетные схемы зданий и сооружений, рассчитываемые в ПК ЛИРА, могут включать в себя нескольких сотен тысяч узлов и элементов.

Генерация больших и сложных объектов значительно облегчается при наличии в интерфейсе прикладной программы библиотек шаблонов (создаваемых с учетом специфики предметной области), а также при широком использовании параметрического ввода данных, повторном применении стандартных решений. Для строительного проектирования такими базовыми параметризованными шаблонами являются фермы различных очертаний, плоские и пространственные рамы, тела вращения, пространственные структуры и т.п.

Интерфейс программы должен предоставлять пользователю развитые средства навигации по всему проекту, а также инструменты для фрагментации отдельных частей проекта, для поиска, сортировки и фильтрации данных. Необходимо обеспечить доступ к полной информации о каждом отдельном объекте, его свойствам, и предоставить механизмы оперативной корректировки этой информации.

В настоящее время в качестве обязательного элемента промышленного интерфейса рассматривается возможность отмены введенных операций и возврата на предыдущие шаги редактирования, а также восстановления отмененных операций. В ПК ЛИРА эти функции доступны на всех этапах редактирования проекта и реализованы для неограниченного числа шагов. Среди других полезных интерфейсных функций можно отметить предварительный просмотр проектов без их загрузки в программу. Пользователь может видеть не только название файла проекта, но и изображение проектируемого объекта, его основные характеристики и краткую аннотацию.

Большое внимание в промышленных программах уделяется вопросам документирования и генерации отчетов. Основные требования к системам документирования следующие:

- предоставление стандартных выходных форм с возможностью их гибкой настройки по составу элементов данных и формы выдачи;
- встроенные механизмы генерации пользователем новых выходных форм;
- выдача графической информации в различных векторных и растровых форматах для вывода на печатающие устройства (принтеры, плоттеры), для переноса в документы, создаваемые в специализированных документирующих программах (таких как MS Word), а также для передачи и размещения в сети интернет;
- выдача табличной информации в формате электронных таблиц с возможностью их дальнейшей обработки, вывода и последующего хранения.

Зачастую реальное проектирование представляет собой некоторую технологическую цепочку, отдельные звенья которой реализуют различные программы. Особую актуальность в этом случае приобретают вопросы экспорта-импорта между ними отдельных наборов данных и всех проектов

в целом. Современные промышленные программы отличаются развитым набором функций экспорта-импорта. В настоящее время для этих целей широко используются стандартизованные форматы данных, такие как XML – для текстовых данных, MDB – для баз данных, DXF – для чертежей, GIF и TIFF – для графических данных, AVI – для файлов анимации и т.д. Наличие функций экспорта-импорта позволяет легко и быстро передавать проект из одной программы в другую, или наполнять общую информационную базу проекта, используя различные программы. Это значительно сокращает общие трудозатраты, исключая необходимость многократного повторного задания информации о рассчитываемом объекте.

Одним из важных компонентов любой современной прикладной программы является развитая справочная система. Такая система обычно представляет собой электронный вариант руководства пользователя, включает контекстную справку по всем функциям и диалогам программы, систему навигации и поиска по ключевым словам, а также коллекцию обучающих примеров, позволяющих пользователю самостоятельно и за короткое время изучить функциональность и принципы работы с программой.

Процесс создания реальных проектов в любой области проектирования требует значительных затрат времени и труда пользователей. Поэтому при разработке промышленных программ большое внимание должно уделяться вопросам надежности сохранения проектов, обеспечению защиты их от случайной потери в результате небрежности или воздействия неблагоприятных факторов (отключение электроэнергии, компьютерные вирусы и т.п.). Современные программы реализуют различные подходы, позволяющие восстановить испорченный проект. Наиболее надежными механизмами обеспечения живучести проектов являются функции автосохранения, возможность импорта проекта из промежуточных и рабочих файлов программного комплекса. Актуальными являются также вопросы корректной загрузки старых проектов при переходе на новые версии программ. Подавляющее большинство прикладных программ имеют встроенные механизмы поддержки версий. С их помощью сохраняется преемственность для проектов, созданных с использованием более старых версий.

Так как промышленные программы могут использоваться крупными корпоративными клиентами, их интерфейс и внутренняя реализация должны предусматривать сетевой вариант эксплуатации.

Важным требованием к промышленным программам является обеспечение их инвариантности к различным версиям операционных систем в рамках одного семейства (например, для ОС Windows – 9x, NT, Me, 2000, XP, или для различных модификаций ОС UNIX). Программы должны также иметь встроенные механизмы адаптации к доступным ресурсам компьютера, быть готовыми при необходимости использовать

виртуальную память, кэширование данных и другие способы поддержания работоспособности на недостаточно мощных компьютерах. Другим важным требованием является наличие простой и понятной процедуры установки программы на рабочий компьютер. Большинство пользователей промышленных программ не обладают достаточными навыками системного администрирования персонального компьютера. Поэтому при установке программа должна запрашивать у пользователя только самую необходимую информацию, максимально обеспечивая автоматическую регистрацию и конфигурирование системных настроечных параметров.

В настоящее время все большее число компьютеров подключается к глобальной сети. Поэтому в интерфейсе некоторых прикладных программных комплексов реализован режим “обратной связи” пользователей с разработчиками непосредственно из программы. Сюда относятся регистрация легальных пользователей, получение обновлений программ, информации о новых версиях, отправка вопросов в службу сопровождения, получение технических консультаций в службе технической поддержки. Большинство промышленных программ имеют собственные интернет-сайты, на которых публикуется полная информация о предоставляемых программных продуктах..

Развитие информационных технологий выдвигает новые требования к промышленным программам. В настоящее время ведущие фирмы предлагают своим пользователям online-версии своих программных продуктов, позволяющие работать с программой через интернет практически с любого компьютера, подключенного к глобальной сети. При этом клиентская часть программы, установленная на компьютере пользователя, взаимодействует с серверной частью, располагающейся обычно на Web-узле разработчиков программы. Примером интернет-реализации промышленного программного комплекса может служить проект ЛИРА Online, рассчитанный на широкий круг специалистов-конструкторов, проектировщиков, студентов.

3.2 Составление канонических уравнений МКЭ

Можно выделить два способа составления канонических уравнений, условно назвав их операторным и поэлементным.

Операторный способ тесно связан с реализацией на компьютерах метода конечных разностей и вариационно-разностного метода. Суть его заключается в наличии набора типовых операторов (например, 13-членный оператор конечно-разностного аналога бигармонического дифференциального уравнения для изгибаемой пластины), с которым связаны номера составляемых уравнений. Возможность быстрого составления уравнения с любым номером, что особенно важно при использовании различных итерационных методов, является определенным преимуществом. Однако, при различного рода нерегулярностях число

нетиповых операторов быстро возрастает, что зачастую становится непреодолимым препятствием для применения операторного способа.

Поэлементный способ возник при разработке программ расчета стержневых систем. Его суть заключается в последовательном просмотре всего списка элементов, из которых состоит исследуемый объект. Для каждого рассматриваемого элемента строится МЖ в местной системе, затем переводится в общую систему координат и в соответствии с номерами узлов (а значит, и перемещений), относящихся к этому элементу, рассылаются в общую систему канонических уравнений. Такой способ совершенно безразличен к разнородности элементов, из которых набран исследуемый объект, что особенно важно при расчете комбинированных систем. При использовании этого метода удобно составлять всю систему уравнений сразу или отдельными группами, состоящими из t последовательно расположенных уравнений (если это обусловлено ограничениями памяти, методами решения уравнений или другими причинами).

Последовательность поэлементного способа составления матрицы коэффициентов канонических уравнений для t уравнений, выглядит так:

Рассматривается j группа уравнений. Номер первого уравнения равен j_0 (т.е. это уравнение соответствует j_0 неизвестному), а номер последнего j_0+t . Группы уравнений формируются последовательно, т.е. первой составляется группа уравнений, имеющая $j_0=1$, а последней составляется группа, для которой $j_0+t=n$.

Из массива структурного описания элементов выделяются элемент, и вектор номеров его узловых неизвестных. Если сформированный для r элемента вектор номеров узловых неизвестных не содержит номеров уравнений, входящих в j группу, то r элемент дальше не рассматривается и происходит переход к $r+1$ элементу. В противном случае осуществляется дальнейшее рассмотрение r элемента.

По номерам узлов выделяются их координаты, по которым определяются геометрические размеры элемента и его ориентация относительно общей системы координат (строится матрица направляющих косинусов).

По типу жесткости, соответствующему r элементу, выделяются физические характеристики элемента и из библиотеки процедур достается процедура построения матрицы жесткости (МЖ).

По имеющимся физическим и геометрическим характеристикам r элемента и выделенной процедуре строится МЖ в местной системе координат.

Перемножением полученной МЖ слева и справа на квазидиагональную матрицу направляющих косинусов она переводится в общую систему координат.

По вектору номеров узловых неизвестных определяются адреса элементов составленной МЖ в общей системе координат.

Составляющие правой части (столбцов свободных членов) производятся следующим образом: для узловой нагрузки ее величина сразу засылается в соответствующие места столбцов, а в случае местной нагрузки на КЭ производится предварительное сведение ее к узловой по формуле (2.9).

Если система уравнений строится вся сразу, то необходимость в первых двух пунктах отпадает, и построение системы уравнений включает только пункты 3÷8. Основой составления канонических уравнений является процедуры составления МЖ, которые как, указывалось выше, содержатся в библиотеке конечных элементов (БКЭ). Основное требование к БКЭ – это ее открытость, т.е. возможность пополнять ее новыми процедурами. По сути, именно БКЭ придает программным комплексам, реализующим МКЭ, свойство универсальности и гибкости, так как, пополнив БКЭ новыми КЭ можно расширить класс решаемых задач, практически оставляя без изменений основную структуру комплекса.

Ниже приведем по нашему мнению характерный для современных программных комплексов состав БКЭ, который условно можно структурировать по нескольким разделам:

Конечные элементы, моделирующие линейно деформируемые системы:

Стержни. Как правило, это широкий набор одномерных конечных элементов, обладающих следующими свойствами:

произвольное сечение постоянное или переменное по длине стержня
произвольная местная нагрузка

примыкание к узлам при помощи абсолютно жестких вставок или шарниров

возможность учета сдвига

возможность моделирования частных классов задач – ферменный стержень, стержень балочного роста, в том числе и на упругом основании и др.

Толстые и тонкие пластины. Как правило, это набор двумерных конечных элементов имеющих форму треугольника, прямоугольника, выпуклого четырехугольника и обладающих следующими свойствами:

возможность учета анизотропных, ортотропных и изотропных свойств материала

возможность моделирования многослойных конструкций

возможность моделирования различных классов конструкций: балки-стенки (только мембранная группа усилий и деформаций), изгибаемые плиты, в том числе и на упругом основании (только изгибная группа усилий и деформаций), оболочки (мембранная и изгибная группа усилий и деформаций)

произвольная местная нагрузка на всей или на части области КЭ

Массивные тела. Как правило, это набор трехмерных конечных элементов в виде параллелепипеда, тетраэдра, четырехугольной и

треугольной призмы, выпуклых шестиузлового и восьмиузлового элементов, обладающих следующими свойствами:

возможность учета анизотропных, ортотропных и изотропных свойств материала

произвольная нагрузка на всей или на части области КЭ

Конечные элементы, моделирующие нелинейно деформируемые системы (физическая и геометрическая нелинейность).

Их набор и свойства аналогичны конечным элементам для линейно деформируемых систем, кроме того, эти конечные элементы должны допускать возможность задания произвольных законов деформирования (зависимость между напряжениями и деформациями). Важным и востребованным свойством таких конечных элементов является возможность моделирования биматериальных конечных элементов (типа железобетона) с заданием двух различных законов деформирования, а также возможностью моделировать свойства грунта.

Важным требованием к БКЭ является наличие конечных элементов (особенно стержней и пластин) одновременно учитывающих физическую и геометрическую нелинейность*

Специальные элементы.

Некоторые из этих элементов можно условно отнести к конечным элементам, так как они не обладают собственно атрибутами КЭ – базисные функции, область конечного элемента и т.п. Однако с точки зрения реализации они естественно вписываются в конечно-элементную процедуру и значительно расширяют инструментарий для построения конечно-элементных моделей. К таким элементам можно отнести элементы, моделирующие податливую связь между узлами, законтурные элементы упругого основания, односторонние связи, элемент, моделирующий предварительное напряжение (форкопф), элемент, моделирующий абсолютно жесткое тело и мн. др. Последние два элемента заслуживают более подробного рассмотрения, так как сравнительно мало известны в инженерной практике, однако, оказываются очень полезными при составлении ряда конечно-элементных моделей. Так элемент «форкопф» позволяет моделировать процесс организации заданного натяжения, например, вантовой сети, вантовой сферы, мачтовых вант, мембран и т.п. Для таких конструкций натяжение одной из вант вызывает перераспределение усилий в остальных элементах и для достижения заданного натяжения во всех вантах необходимо организовать достаточно сложный итерационный процесс, который моделирует натурный процесс натяжения, когда заданное натяжение достигается последовательным (с многократной подтяжкой и отпусканьем) натягивающих устройств

* В ПК ЛИРА имеется большой набор стержневых и пластинчатых конечных элементов, одновременно учитывающих физическую (в том числе и для железобетона) и геометрическую нелинейность.

(форкопфов, домкратов, полиспастов) с непрерывным контролированием величин предварительного натяжения.

Элемент «абсолютно жесткое тело» может оказаться очень полезным, при моделировании, например, такого распространенного класса конструкций как безригельное перекрытие, опирающееся на колонны с различным сечением. В этом случае тело колонны в области плиты моделируется этим элементом с ведущим узлом, соответствующим центру тяжести сечения колонны, и ведомыми узлами, соответствующими узлам контура сечения колонны. Подробно об этом в разделе 3.5, а в главе 4 приводится ряд примеров применения этих элементов на основе ПК ЛИРА.

Необходимым требованием к БКЭ является ее «прозрачность», т.е. для каждого КЭ должны быть описаны базисные функции, типы узловых неизвестных и приведены величины порядка сходимости*. Это может оказаться очень полезным для пользователя при составлении сложных комбинированных конечно-элементных моделей и оценки полученного приближенного решения.

Построение МЖ может выполняться несколькими способами:

- Непосредственное использование заранее полученных формул для каждого элемента МЖ. Этот способ, как правило, используется для простых (стержень, прямоугольный или треугольный элемент балки-стенки) и часто используемых конечных элементов, так как он обладает наибольшим быстродействием.
- Получение на основе матриц D , B и базисных функций формул в явном виде, а затем конкретных значений элементов МЖ.
- Использование численного интегрирования. Этот прием применяется в случае затруднительного получения формул (треугольные и четырехугольные элементы плит и оболочек и т.п.). При этом используются точные формулы численного интегрирования.

В этом случае для вычисления интеграла $I = \int_{\Omega} f(x) d\Omega$, используются формулы численного интегрирования (квадратичные), которые имеют вид:

$$I = S \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot k_i,$$

где S – площадь (длина, объем) области Ω , x_i – набор точек, k_i – весовые координаты.

Координаты узлов x_i и значения весовых коэффициентов k_i подбираются таким образом, чтобы полученные квадратурные формулы были точными на Ω для многочленов некоторой степени. В качестве областей Ω рассматриваются:

* В БКЭ реализованной в ПК ЛИРА эти требования соблюдены.

отрезки;
 треугольники и прямоугольники;
 тетраэдры, прямые треугольные призмы и прямоугольные параллелепипеды.

Более сложные области, например, четырехугольники, получаются объединением перечисленных выше.

Для отрезков, прямоугольников и прямоугольных параллелепипедов применяются известные квадратурные формулы Гаусса. Квадратурные формулы для треугольников и тетраэдров приведены в [3.7].

При построении матрицы жесткости и вектора правых частей, согласно (2.8),

$$I = \int_{\Omega_r} (DB\varphi_j) B\varphi_i d\Omega \text{ или } I = \int_{\Omega_r} f\varphi_i d\Omega$$

Поэтому степень многочлена p_0 , который должен интегрироваться точно, определяется порядком m дифференциального оператора B и степенью полиномов p , определяющих базисные функции. Для первого интеграла $p_0=2(p-m)$, для второго интеграла $p_0=p$.

Для сохранения положительной определенности матрицы жесткости требуется, как указано в [3.8], чтобы все весовые коэффициенты k_i были положительны*.

При решении физически нелинейных задач, когда модули деформации переменны по области КЭ, численное интегрирование практически является безальтернативным приемом.

Приведенные выше три методики получения МЖ применяются и при реализации процедуры приведения местной нагрузки на КЭ к узловой.

Составление канонических уравнений МКЭ связано с решением ряда проблем: порядок нумерации узлов с целью сокращения количества вычислений и улучшения обусловленности матрицы системы уравнений, учет кинематически связанных перемещений, реализация различных систем координат, расчет на деформационные воздействия и многое другое. Некоторые наиболее по нашему мнению важные проблемы будут рассмотрены ниже.

3.3 Решение систем уравнений высоких порядков

Успешная реализация МКЭ, как и любого численного метода, всегда будет связана с достижениями в проблеме решения систем уравнений высоких порядков. Да и само появление электронных вычислительных

* Квадратурные формулы для треугольника, точные для многочленов степени выше третьей, но с отрицательными весовыми коэффициентами, предложены в [3.7]. В ПК ЛИРА используются формулы с положительными коэффициентами.

машин объяснено необходимостью решения систем из нескольких десятков (кажется 43) линейных уравнений для проблем ядерной физики.

История проблемы решения систем уравнений высоких порядков в какой-то системе отражает весь драматизм многочисленных заблуждений и находок специалистов на пути реализации численных методов решения задач механики и, конечно, в первую очередь МКЭ.

Вначале была эйфория. В конце 50-х появились первые программы, которые решали несколько десятков линейных уравнений за несколько минут (тогда был реализован метод Гаусса, да и сейчас метод исключений – это практически основа всех многочисленных модификаций) и казалось, что проблема закрыта, так как сравнения проводились с возможностями ручного счета. Опытным путем было выявлено, что специалист на клавишных автоматах с хорошей организацией проверок может решить систему до 18 уравнений. Для этого требовалось несколько дней, а дальнейшее увеличение количества уравнений приводило практически к невозможности их решения из-за непреодолимого нарастающего каскада ошибок (человеческий фактор!).

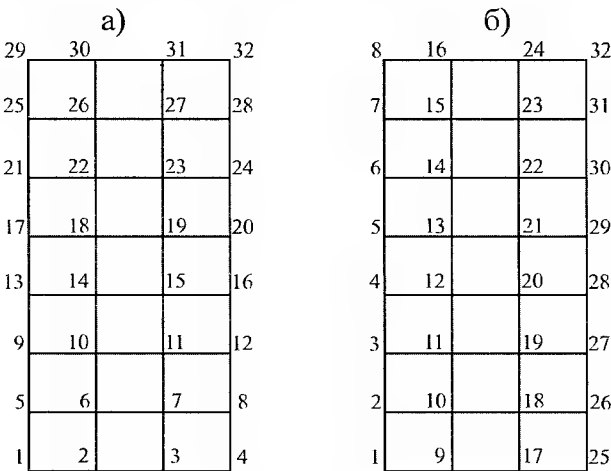


Рис.3.1

а) – хорошая нумерация
б) – «плохая» нумерация

Эйфория быстро прошла, так как появились алгоритмы составления уравнений, и сразу же появилась необходимость решения систем из нескольких тысяч уравнений. Для тех времен это была огромная, поражающая впечатление специалистов величина, а для слабых ЭВМ того времени это уже стало проблемой.

Сразу же появились приемы для уменьшения количества

вычислений [3.1], в первую очередь использование симметрии (прерогатива вариационных методов) и ленточной структуры матрицы.

Вначале минимизация ширины ленты достигалась за счет использования различных рекомендаций при «ручной» нумерации узлов. Например, в случае «вытянутой» конструкции нумерацию целесообразно проводить последовательно по узкой полосе (рис 3.1). Затем при появлении автоматической триангуляции начали использовать методы [3.2], позволяющие проводить автоматически минимизацию ширины ленты.

Много работ было посвящено использованию специфики аппаратной реализации арифметических действий – метод обхода нулей, основанный на замене в ряде случаев арифметических операций более быстрыми «логическими», минимизация обращений к внешней памяти, основанная на групповом исключении неизвестных [3.3] и т.п.

Сейчас, когда часто используются компьютерные модели конструкций, включающие более 1 млн. неизвестных перемещений появилась новая проблема преодоления плохой обусловленности матрицы.

Для уменьшения влияния плохой обусловленности существует несколько приемов: выбор благоприятной формы КЭ, исключение элементов с очень большой или очень маленькой жесткостями по сравнению с большинством принимаемых элементов (эти приемы обсуждаются в разделе 4), последовательность нумерации узлов. Так известно, что при локализованной области узлов с наложенными связями, узлы этой области следует нумеровать последними, т.е. проводить нумерацию узлов начиная с наиболее слабой (в смысле жесткостей и связей) к более жесткой.

В этом смысле если конструкция на рис. 3.1 имеет связи, наложенные по линии узлов 25-32, то нумерация рис. 3.1.б окажется более предпочтительной.

В настоящее время имеется много прямых и итерационных методов решения систем линейных уравнений высоких порядков (профильные, фронтальные, многофронтальные, многосеточные, агрегатные и мн. др.) в той или иной степени направленных на преодоление проблемы плохой обусловленности матрицы и больших затрат времени.

Все эти методы можно разделить на прямые (заранее известно количество вычислений, но неизвестно какая точность будет достигнута) и итерационные (задается точность, которую надо достичь, но неизвестно количество вычислений для достижения этой точности и вообще нет гарантии, что эта точность будет достигнута).

Практически все прямые методы основаны на методе исключения Гаусса. Общей идеей большинства итерационных методов для решения уравнений $Ku=P$ является построение некоторой положительно определенной матрицы B . В матрице B , на каждом шаге решается линейная система уравнений

$$BV_n = H - Ku_n,$$

по найденному V_n определяется u_{n+1} .

Матрица B , должна быть такой, чтобы система $Bv=Q$ решалась значительно быстрее исходной. Различные методы построения матриц B приведены в [3.4].

В определенном смысле примером таких методов может служить метод Зейделя, хорошо известный и применявшийся достаточно часто в докомпьютерный период. Для метода Зейделя матрица B представляется

диагональной составленной из диагональных членов матрицы K , а $U_{n+1}=V_n+U_n$. Процесс продолжается до тех пор, пока значение вектора V_n будет лежать в пределах заданной точности.

Для промышленных программ дающих возможность рассчитать конструкцию на много загрузений или построить и исследовать «нелинейные» компьютерные модели, безусловно, предпочтительнее прямые методы, так как они предполагают получение триангулированной матрицы, а затем быструю обработку прямым и обратным ходом многочисленных столбцов свободных членов.

Для некоторых нелинейных задач применение метода Биргера (упрощенный метод Ньютона) обуславливает несколько сотен прямых и обратных ходов для столбцов свободных членов. Конечно, в этих случаях итерационные методы мало пригодны.

Среди прямых методов, безусловно, выделяются своей целесообразностью современные методы решения разреженных матриц и

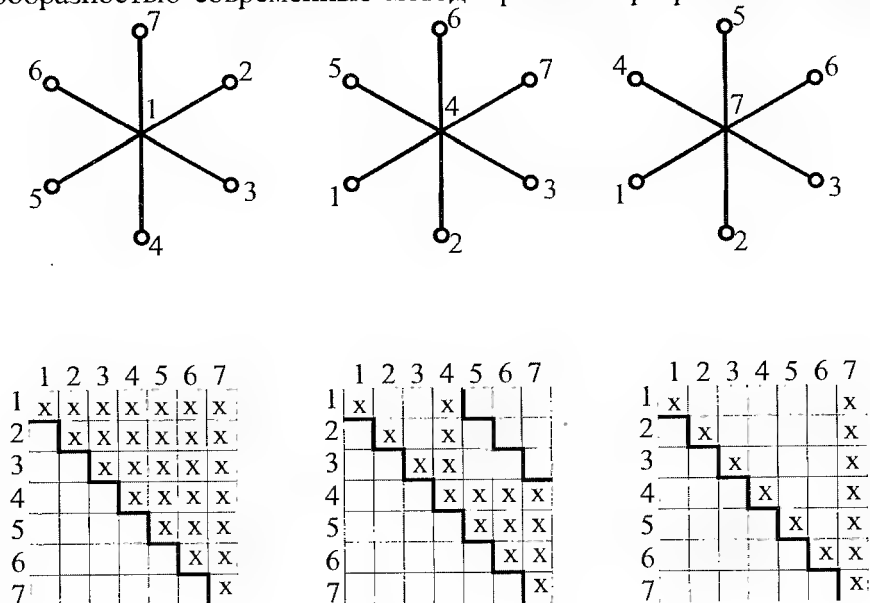


Рис. 3.2

классический метод суперэлементов, впервые примененный в промышленных программах в 1969г. [3.5]

Прямой метод решения разреженных матриц* представляет собой обыкновенный метод Гаусса с нумерацией неизвестных таким образом, чтобы минимизировать количество вычислений, т.е. количество элементов матрицы, заполняемых в процессе исключения. Идея этого метода продемонстрирована на рис. 3.2.

* Реализованный в ПК ЛИРА этот метод в ряде случаев позволяет в 8-10 раз ускорить процесс решения системы линейных уравнений по сравнению с ленточными структурами.

На рис. 3.2 показано три способа нумерации узлов. Первый способ (рис. 3.2 а) наиболее неудачный, так как матрица в процессе исключения полностью заполняется и количество заполняемых элементов равно 15.

На рис. 3.2 б показана нумерация, организованная по методу минимальной ширины ленты. В этом случае количество заполненных элементов равно 5. На рис. 3.2 в показана нумерация, характерная для метода разреженных матриц (в данном случае она совпадает с окаймленной структурой, для задачи с более сложными связями она имеет вид многонебоскрежной структуры, рис. 3.3), заполняемые элементы матрицы в этом случае вообще отсутствуют.

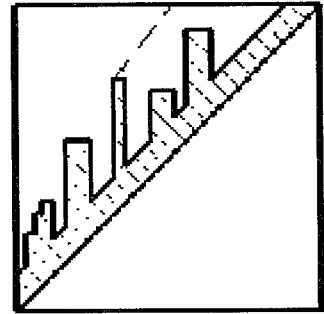


Рис. 3.3

Идея алгоритма перенумерации для разреженных матриц состоит в следующем: выбирается узел, а всем узлам, связанным с ним присваиваются последние номера, затем выбирается следующий узел и эта процедура повторяется. Конечно, метод выбора первого и последующих узлов является определенным know-how.

Если метод разреженных матриц частично решает только первую проблему — минимизирует количество вычислений, то метод суперэлементов ориентирован на решение второй проблемы преодоление плохой обусловленности матрицы. Суперэлементный подход особенно эффективен, когда расчленение на подсистемы происходит естественно: например, здание из объемных блоков (объемный блок — суперэлемент) или диафрагма высотного здания, собирающаяся из отдельных панелей (панель — суперэлемент). Фрагмент диафрагмы высотного здания показан на рис. 3.5. Диафрагма состоит из отдельных панелей, соединяющихся между собой в угловых точках.

Расчет такой системы можно выполнить обычным способом: нанести необходимую сетку и рассчитать всю систему целиком. Однако большое количество расчетных узлов, элементов, неизвестных перемещений может сильно затруднить решение задачи. Используя суперэлементы, можно провести расчет поэтапно, существенно снизив на каждом этапе

размерность задачи. Сначала построить матрицу жесткости для всех типов суперэлементов [в данном случае имеются два типа (рис. 3.4)], затем рассчитать систему, состоящую из

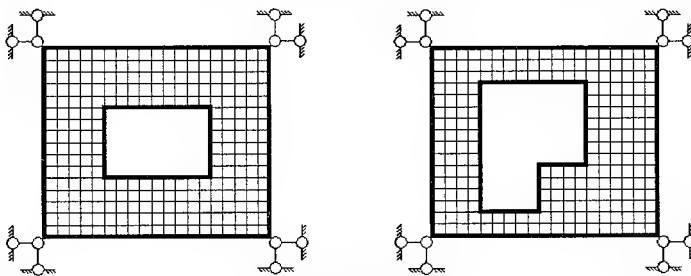


Рис. 3.4

суперэлементов (в данном случае система будет состоять из 6 суперэлементов с 12 суперузлами). В результате этого расчета будут определены перемещения суперузлов. На заключительном этапе рассчитать каждый из шести суперэлементов на заданные перемещения суперузлов.

Последовательность расчета системы, набранной из суперэлементов, аналогична приведенной ранее с той лишь разницей, что матрица жесткости и узловые нагрузки определяются в результате расчета. Так как суперэлемент представляет сам по себе

достаточно сложную систему, то матрицы базовых функций φ_c строятся при помощи численного расчета суперэлемента на единичные смещения суперузлов, в результате которого строится матрица влияния, связывающая перемещения внутренних узлов суперэлемента с единичными смещениями суперузлов. Такая процедура обработки суперэлементов позволяет представить метод суперэлементной рекурсии как расчет по методу конечных элементов с построением аппроксимирующих функций при помощи матриц влияния.

Другая процедура обработки суперэлементов, основана на том, что в физическом смысле исключения j неизвестного по Гауссу соответствует освобождению от j связи. Это приводит к такой схеме построения матрицы

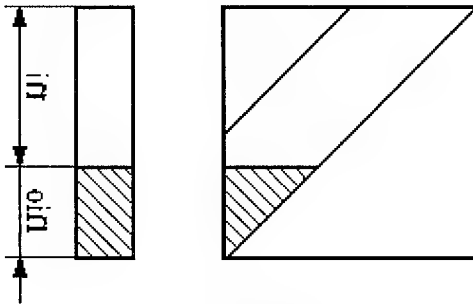


Рис. 3.6

жесткости и сведение местной нагрузки к узловой: для i суперэлемента вначале нумеруются все внутренние узлы (соответствующее им число степеней свободы обозначим n_i), а затем суперузлы (количество степеней свободы, соответствующее суперузлам, обозначим n_{i0}); составляются канонические уравнения для всех n_i+n_{i0} степеней свободы (рис. 3.6); исключаются n_i неизвестные; оставшиеся части матрицы и столбцов свободных членов (на рис. 3.6 они заштрихованы) образуют искомые матрицы жесткости и столбцы узловых нагрузок.

С точки зрения этой процедуры метод суперэлементной рекурсии можно трактовать как своеобразный блочный метод Гаусса.

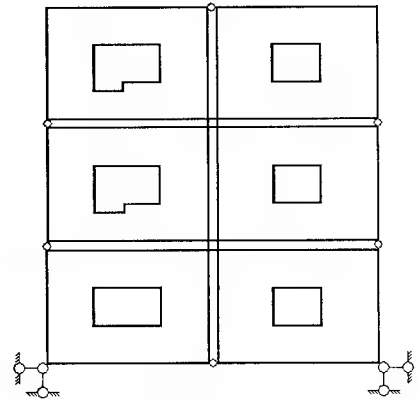


Рис. 3.5

С точки зрения строительной механики и метода конечных элементов такой подход можно трактовать как применение в расчете алгоритмических конечных элементов, для которых матрица жесткости и приведение местной нагрузки к узловой осуществляется численными методами (не путать с численным интегрированием).

Суперэлементы, в свою очередь, можно расчленить на подсистемы (суперэлементы 2-го ранга), развивая этот процесс и организовав своеобразную многогранговую рекурсию.

Таким образом, суперэлементный подход позволяет значительно сократить (особенно при наличии одинаковых типов суперэлементов) количество вычислений. Влияние плохой обусловленности общей матрицы систем уравнений преодолевается за счет того, что при наличии одинаковых типов конечных элементов погрешность локализуется. Используя физический смысл МЖ суперэлемента (возможность проверки различных видов равновесия, так в каждой строчке МЖ можно выбрать элементы, сумма которых должна быть равна нулю, или составить уравнение равновесия относительной оси проходящей через любые два суперузла и т.п.). На основе различных предпосылок можно «подправить» элемент МЖ полностью исключив погрешность, накопленную в процессе исключения неизвестных перемещений внутренних узлов суперэлемента. По такой же процедуре может быть обработан и столбец (n_i на рис. 3.6) супернагрузок.

Метод суперэлементов может оказаться очень удобным при решении нелинейных задач, когда существуют подконструкции, которые можно рассматривать как линейные. Например, здания большой жесткости на податливых односторонних связях. В этом случае схема здания может быть объявлена суперэлементом и итерационный процесс решения нелинейной задачи будет сведен к расчету небольшой основной системы.

Таким образом, реализация методов решения разреженных матриц совместно с суперэлементным в настоящее время является наиболее эффективным инструментарием так как дает возможность:

- значительно сократить количество вычислений, а следовательно и время решения задачи;
- достаточно успешно решить проблему плохой обусловленности матрицы больших систем уравнений;
- организовать эффективное решение нелинейных задач;
- удобно осуществить синтез компьютерных моделей, т.к. на этапе создания расчетных схем работа с суперэлементами обладает теми же удобствами, что и работа с фрагментами.

Определенным недостатком суперэлементного подхода является трудность реализации, связанная не только с организацией рекурсивного расчета, но и организацией пользовательского интерфейса. Так визуализация результатов расчета (изополей усилий и напряжений) для

всей конструкции, состоящей из суперэлементов, связана со значительными трудностями.

Этим, по-видимому, можно объяснить, что суперэлементный подход реализован только в наиболее продвинутых программных комплексах.

3.4 Глобальные, местные, локальные системы координат, углы чистого вращения

Глобальная система координат (g) предназначена для задания общей геометрии системы – координат узлов, ориентации некоторых нагрузок, ориентации местных (m) и локальных (l) систем координат. Глобальная система координат может быть декартовой, сферической, цилиндрической или другой системой, которая может быть задана аналитически. Местная система координат является прерогативой конечного элемента и предназначена для ориентации конечного элемента относительно глобальной системы координат, удобства построения матрицы жесткости, задания местной нагрузки, определения напряжений и усилий. Как правило, местная система координат – декартовая. Локальная система координат (безусловно, здесь можно говорить о некоторой тавтологии – местная и локальная, по сути, обозначают одно и то же, однако будем считать, что это издержки терминологии) является прерогативой узла и предназначена для ориентации некоторых его атрибутов: узловой нагрузки, узловых перемещений. Как правило, локальная система координат тоже декартовая. Реализации различных сочетаний этих систем предоставляет много удобств* при составлении компьютерных моделей.

Так, например, для гидростатического давления на цилиндрический резервуар удобно задавать местную нагрузку на конечные элементы в местной системе координат, а при нагрузке от собственного веса удобно задавать нагрузку в глобальной системе координат, имеющей одну из осей направленную вертикально. Если необходимо задать узловую нагрузку, связь или организовать расчет на заданное перемещение, направление которых не совпадает с осями глобальной системы, то в соответствующий узел вводится локальная система координат с нужными направлениями.

Различные возможности применения этих систем координат и их сочетаний еще будут неоднократно обсуждаться ниже, и, конечно же, в четвертой главе при рассмотрении технологии синтеза компьютерных моделей.

Алгоритмы построения матриц жесткости и приведение местной нагрузки к узловой удобно организовывать в местной системе координат. Это касается как использования аналитического вида МЖ (для каждого элемента МЖ имеется формула) так и при численном интегрировании. Для

* В ПК ЛИРА реализованы три типа систем координат и пользователю предоставляется возможность манипулирования ими в различных сочетаниях.

ориентации местной системы координат КЭ имеющих более двух узлов достаточно иметь координаты трех узлов. Например, ось X_m проводится через первые два узла (рис. 3.7), ось Y_m совпадает с направлением перпендикуляра к оси X_m , проходящего через третий узел, а ось Z_m образует правую тройку. При этом матрица направляющих косинусов (Cmg^*), на

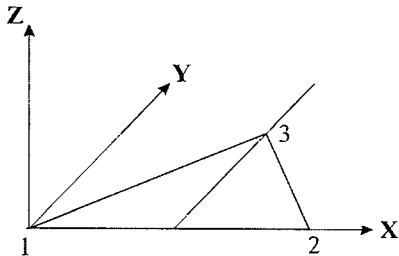


Рис. 3.7

основе которой производится перевод атрибутов КЭ (матрица жесткости, местная нагрузка и др.) из местной системы координат в общую имеет вид:

Компоненты этой матрицы вычисляются по координатам трех узлов элемента (см. рис. 3.7) в глобальной системе координат по следующим формулам:

$$\cos_{1.1} = X_2/L_0, \cos_{2.1} = Y_2/L_0,$$

$$\cos_{3.1} = Z_2/L_0, \cos_{1.2} = (X_3 - P_1 X_2)/L_1,$$

$$\cos_{2.2} = (Y_3 - P_1 Y_2)/L_1, \cos_{3.2} = (Z_3 - P_1 Z_2)/L_1, \cos_{1.3} = (Y_2 Z_3 - Z_2 Y_3)/L_2,$$

$$\cos_{2.3} = (Z_2 X_3 - X_2 Z_3)/L_2, \cos_{3.3} = (X_2 Y_3 - X_3 Y_2)/L_2$$

где $L_0 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}$ — длина отрезка 1–2,

$L_1 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2 - P^2}$ — длина перпендикуляра из узла 3 на 1–2,

$P = (X_2 \cdot X_3 + Y_2 \cdot Y_3 + Z_2 \cdot Z_3)/L_0$, $L_2 = L_0 \cdot L_1$, $P_1 = P/L_0$ $X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3$

— координаты в глобальной системе 2 и 3 узлов относительно узла 1, т.е. $X_2 = X_2 - X_1$ и т.д.

Для двухузловых элементов, а их класс очень велик (стержневые элементы), системы координат двух узлов недостаточно для построения такой матрицы косинусов, для

Глобал.		X	Y	Z	
		1	2	3	
Местн.					
	X_m	1	$\cos_{1.1}$	$\cos_{1.2}$	$\cos_{1.3}$
	Y_m	2	$\cos_{2.1}$	$\cos_{2.2}$	$\cos_{2.3}$
Z_m	3	$\cos_{3.1}$	$\cos_{3.2}$	$\cos_{3.3}$	

* В большинстве случаев для ориентации одной декартовой системы относительно другой достаточно знать три угла Эйлера, однако в случае Карданова подвеса углы Эйлера определяются неоднозначно. В связи с этим в реализации предпочтительней использовать матрицу косинусов.

этого еще необходима дополнительная информация, например, угол чистого вращения, определяющий положение главных осей сечения стержня относительно глобальной системы координат (рис. 3.8).

Как правило, ось X_m совпадает с осью стержня (рис. 3.8 а), а оси Y_m и Z_m являются главными осями сечения стержня. Обычно их ориентация определяется углом чистого вращения (устоявшийся термин строительной механики стержневых систем), который является углом между одной из главных осей сечения (например, Y_m) и осью ОА (пересечение плоскости поперечного сечения стержня, которая ортогональна оси X_m , с плоскостью XOY глобальной системы координат).

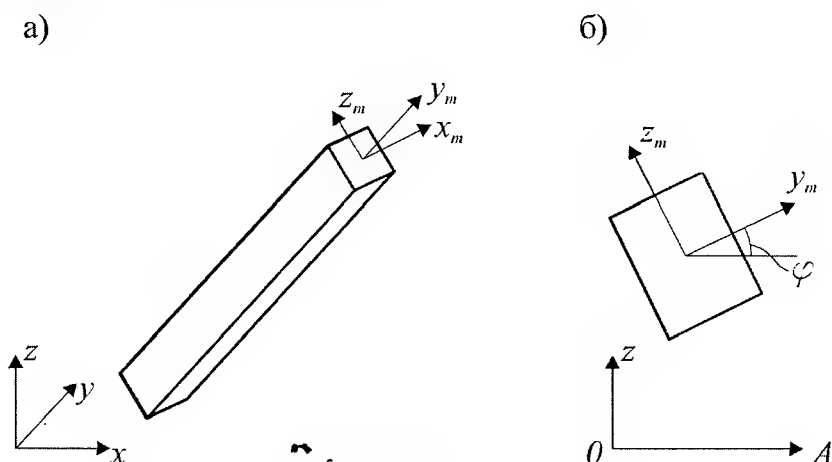


Рис. 3.8

Очень часто направление Y_m задают третьим узлом, тогда построение Cmg для стержня аналогично элементу пластины.

Для задания локальной системы координат необходимо задание матрицы Clg направляющих косинусов между осями локальной и глобальной систем координат. Если матрица Cmg для элементов, имеющих более двух узлов может быть построена на основе имеющихся координат узлов, заданных в глобальной системе координат, то при задании Cmg для стержня, а также Clg нужна дополнительная информация, поэтому программный комплекс должен предоставлять пользователю удобный инструментарий для его задания*.

При составлении канонических уравнений МКЭ матрицы жесткости K_m и векторы местной нагрузки P_m , приведенной к узловой, необходимо переводить в глобальную систему координат, а если узел имеет локальную систему координат, то этот перевод необходимо произвести с учетом локальной системы координат. Этот перевод производится по следующей схеме:

* В ПК ЛИРА реализованы многочисленные приемы, облегчающие пользователю задание такой информации.

C_{mg} – матрица косинусов для перевода компонентов K_m и P_m из местной в глобальную систему координат;

C_{gl} – матрица косинусов для перевода компонентов K_m и P_m из глобальной в локальную систему координат.

Очевидно, что $C_{gm} = C_{mg}^T$, $C_{lg} = C_{gl}^T$.

Кроме того,

$$C_{ml} = C_{gl} \cdot C_{mg} \text{ и } C_{lm} = C_{ml}^T = C_{mg}^T \cdot C_{gl}^T.$$

Тогда для перевода вектора из местной системы координат в локальную используется матрица $C_{ml} = C_{gl} \cdot C_{mg}$, т.е. $X_l = C_{gl} \cdot C_{mg} \cdot X_m$.

Для преобразования матрицы жесткости в местной системе координат K_m в матрицу жесткости в локальной системе координат K_l

$$K_l = C_{lm} \cdot K_m \cdot C_{ml} = C_{lg} \cdot C_{gm} \cdot K_m \cdot C_{mg} \cdot C_{gl}$$

Для вектора правых частей:

$$P_l = C_{ml} \cdot P_m = C_{gl} \cdot C_{mg} \cdot P_m$$

Для преобразования K_m в матрицу жесткости относительно глобальной системы координат используется формула:

$$K_g = C_{gm} \cdot K_m \cdot C_{mg}, \text{ а для вектора правых частей } P_g = C_{gm} \cdot P_m.$$

Перевод параметров НДС из одной системы координат в другую производится во многих случаях, например, вычисление в местной системе координат напряжения (усилия) перед построением изолиний и изополей должны быть переведены в глобальную систему, а при построении главных напряжений должны быть указаны их направления относительно глобальной системы координат и т.п.

3.5 Реализация граничных условий Расчет на заданные перемещения Кинематическая связь перемещений

Граничные условия в виде наложенных абсолютно жестких связей реализуется при помощи вычеркивания из общей матрицы жесткости строк и столбцов, соответствующих перемещению, по направлению которого наложена связь. Алгоритмическое описание этой процедуры приведено в разделе 3.2. Если наложенная связь имеет податливость, то по этому направлению может быть введен одномерный элемент (стержень), имеющий только одну соответствующую жесткость. В библиотеке конечных элементов должен иметься набор таких элементов облегчающих пользователю эту процедуру. А наличие локальной системы координат позволяет моделировать случаи, когда наложенные связи не совпадают с глобальной системой координат.

Терминология: с точки зрения МКЭ такого типа элементы (а их набор может быть достаточно широк, например, элементы, моделирующие податливую связь между узлами, элементы, моделирующие предварительное напряжение и т.п.) не являются конечными элементами, так как не обладают необходимыми атрибутами КЭ (область, базисные функции), но с точки зрения инженера – это элементы, моделирующие то или иное свойство конструкции, так что в дальнейшем мы будем называть их конечными элементами, хотя у апологетов МКЭ это может вызвать неудовольствие.

При присоединении узла КЭ к узлу расчетной схемы одна или несколько связей может отсутствовать или иметь конечную жесткость. Типичным примером такого случая может быть шарнир. Опытный пользователь может организовать шарнир «подручными средствами» – двойная нумерация узла с последующим объединением соответствующих перемещений. Но в случае если линия цилиндрических шарниров не совпадает с одной из глобальных осей или «шарниры» не полные, а имеют конечную жесткость, должно быть реализовано «частное» решение, основанное на жордановом исключении.

Если же шарнир «неполный», т.е. конечный элемент присоединяется к узлу при помощи податливой связи, то в этом случае можно использовать специальный конечный элемент «податливая связь в узле». Однако имеется более чистое решение, основанное на преобразовании матрицы жесткости подобно тому, как преобразовывается матрица жесткости стержня имеющего на одном из концов шарнир. Это преобразование основано на Жордановом исключении.

Приведем механическую трактовку этого преобразования, предложенную в [3.6]. К узлу элемента, где назначен шарнир по некоторому направлению с номером n , добавляется еще один стержень, имеющий жесткость Rel только по этому направлению (жесткость шарнира). Матрица жесткости такого стержня имеет вид:

$$\begin{array}{cc} Rel & -Rel \\ -Rel & Rel \end{array}$$

Таким образом, матрица жесткости элемента окаймляется строкой и столбцом, ее размерность становится $n_0 + 1$, причем $K_{n_0+1, n_0+1} = Rel$, $K_{n, n_0+1} = K_{n_0+1, n} = -Rel$, к диагональному элементу $K_{n, n}$ добавляется слагаемое Rel . В частном случае полного шарнира $Rel=0$. Далее производится Жорданово исключение для неизвестного (строки, столбца) с номером n .

При этом производятся следующие преобразования.

Обозначим $q = K_{n, n} + Rel$, $r_j = K_{j, n}$.

Элементы преобразованной матрицы $K_{i, j}^0$ вычисляются по формулам:

$$K_{n, n}^0 = Rel - (Rel)^2 / q = K_{n, n} \cdot Rel / q$$

$$K_{n,j}^0 = K_{j,n}^0 = K_{j,n} \cdot Rel/q \quad j \neq n$$

$$K_{i,j}^0 = K_{j,i}^0 = K_{i,j} - r_i \cdot r_j/q, \quad i \neq n, \quad j \neq n$$

в простейшем случае сжато-растянутого стержня и шарнира по X в первом узле имеем:

$$K_{1,1}^0 = K_{2,2}^0 = \frac{EF}{l}, \quad K_{1,2} = K_{2,1} = -\frac{EF}{l}, \quad n=1, \quad n_0=2.$$

Для преобразованной матрицы получим:

$$K_{1,1}^0 = \frac{EF}{l} \cdot \frac{Rel}{\frac{EF}{l} + Rel}$$

$$K_{1,2}^0 = K_{2,1}^0 = -\frac{EF}{l} \cdot \frac{Rel}{\frac{EF}{l} + Rel}$$

$$K_{2,2}^0 = \frac{EF}{l} - \left(\frac{EF}{l} \right)^2 / \left(\frac{EF}{l} + Rel \right) = \frac{EF}{l} \cdot \frac{Rel}{\frac{EF}{l} + Rel}$$

т.е. все элементы матрицы умножены на $\frac{Rel}{\frac{EF}{l} + Rel}$.

При полном шарнире ($Rel=0$) получим $K_{ij}=0$.

Расчет на заданные перемещения несколько нарушает стандартную процедуру МКЭ так как разрешающие уравнения МКЭ представляют собой уравнения равновесия и в правой части находится нагрузка. Поэтому такой расчет можно трактовать как учет граничного условия, когда перемещение узла равно не нулю (введение абсолютно жесткой связи), а имеют величину отличную от нуля. Процедура расчета на заданные перемещения связана с обработкой матрицы K канонических уравнений по следующей схеме.

В системе уравнений МКЭ $Kq+P=0$, для какой либо из компонент q_j вектора неизвестных q , задано значение $q_j = q_j^0$. Рассмотрим вектор q^0 , у которого j -тая компонента равна q_j^0 , остальные равны нулю, и представим вектор q в виде

$$q = q^1 + q^0.$$

Очевидно, что j -тая компонента вектора q^1 равна нулю, остальные компоненты векторов q и q^1 совпадают. Тогда для вектора q^1 получим систему

$$Kq^1 + P_1 = 0,$$

где $P_i = Kq^0 + P$ – новый вектор правых частей. В этой системе для j -того неизвестного следует добавить граничное условие $q_j^1 = 0$.

Вектор Kq^0 можно получить либо непосредственным умножением матрицы K на вектор q^0 , он будет равен j -тому столбцу матрицы K , умноженной на q_j^0 , либо, что более удобно и соответствует поэлементному методу составления матрицы, суммированием всех реакций конечных элементов Ω_r , имеющих узловые неизвестные с номером j , от перемещения q_j^0 .

Обработка матрицы K по рассмотренной выше схеме по сути аналогична процедуре наложения связей, т.е. если компонента вектора $q_j = 0$, то это означает, что по направлению этого узлового неизвестного наложена связь. Поэтому, расчет на заданное перемещение в каком-либо нагружении обусловит наличие наложенной связи для других нагружений, если для них используется обработанная матрица K . Если надо провести расчет на заданное перемещение в одном нагружении, а для других нагружений соответствующее узловое неизвестное присутствует (т.е. по этому направлению нет связи), то необходимо использовать две различные матрицы K .

При составлении компьютерных моделей конструкций часто встречаются случаи, когда имеются включения абсолютно жестких тел, обуславливающих кинематическую связь перемещений. Конструктивные решения, которые побуждают инженера вводить такие тела, будут рассмотрены в главе 4. Здесь же рассмотрим несколько конкретных случаев их реализации.

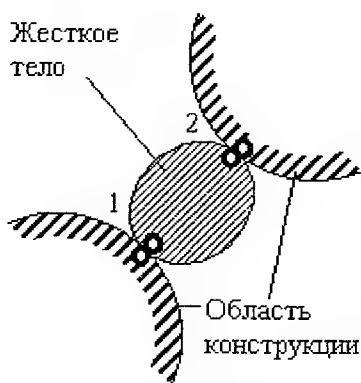


Рис. 3.9

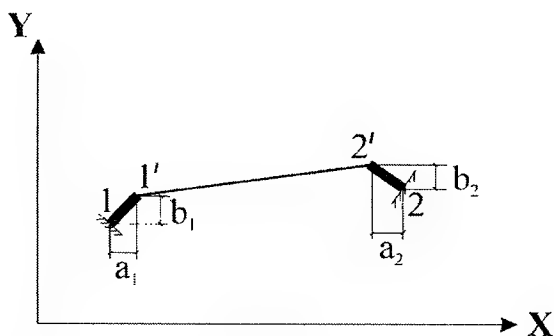


Рис. 3.10

На рис. 3.9 приведен наиболее простой случай, когда необходимо объединить перемещения узлов 1 и 2 по направлению 1 – 2. В этом случае в узлы 1 и 2 можно ввести локальную систему координат, так чтобы одна из осей совпадала с направлением 1 – 2 и объединить перемещения. Более

сложный и наиболее часто встречающийся случай – это абсолютно жесткие вставки. На рис. 3.10 приведен случай присоединения упругой части стержня (1'–2') к основным узлам конструкции (1, 2) при помощи абсолютно жестких вставок. В этом случае полученные матрицы жесткости элемента 1 – 2 выглядят следующим образом:

$$[МЖ_{12}] = [NN'] \times [МЖ_{1'2'}] \times [U'U],$$

где $МЖ_{1'2'}$ – матрица жесткости упругой части стержня 1'2'

NN' – матрица, связывающая усилия в сечениях 1'(2'),

например $M_1 = M'_1 + R'_{x_1} - R'_{y_1} \cdot \alpha_1$

$U'U$ – матрица кинематической связи перемещений в узле 1'(2') с перемещениями в узле 1 (2),

например $\alpha'_1 = \alpha_1 + v\alpha_1 - ub_1$

где α , v , u – перемещение (угол поворота и линейные смещения вдоль осей Y и X)

Более сложный случай, когда абсолютно жесткое тело связывает несколько узлов (рис. 3.11), требует более сложной реализации.

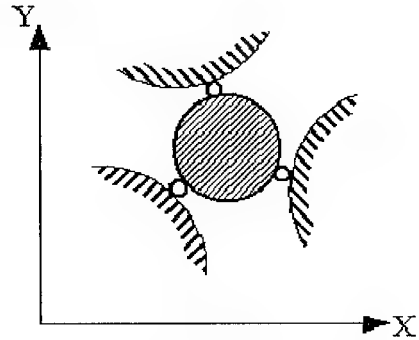


Рис. 3.11

Пусть узлы $x_0, x_1, \dots, x_n$ объявлены узлами жесткого тела. Обозначим $r_i = x_i - x_0$ $i = 1, \dots, n$ – векторы, направленные от первого узла ко всем остальным, u_i, α_i $i = 1, \dots, n$ – векторы перемещений и поворотов узлов x_i . При малых величинах поворотов α_i для жесткого тела векторы u_i, α_i связаны соотношениями

$$u_i = u_0 + [\alpha_0 \times r_i]$$

$$\alpha_i = \alpha_0 \quad i = 1, \dots, n,$$

где символом $[x]$ обозначено векторное произведение трехмерных векторов.

Для векторов усилий (реакций) N_i, M_i справедливы аналогичные соотношения

$$N_i = N_0$$

$$M_i = M_0 + [r_i \times N_0]$$

Матрицы размерности 6×6 , соответствующие преобразованиям перемещений и реакций будут обозначать соответственно $C_{u,i}$ и $C_{M,i}$. Если конечный элемент Ω_i содержит один или несколько узлов жесткого тела, его матрица жесткости K_r и вектор нагрузок P_r преобразуются с помощью матриц $C_{u,r}$ и $C_{M,r}$, построенные по $C_{u,i}$ и $C_{M,i}$ по формулам:

$$K_{r,0} = C_{M,r} K_r C_{u,r}, \quad P_{r,0} = C_{M,r} P_r.$$

Эти формулы применяются и для стержней с жесткими вставками. При больших поворотах применяются формулы [3.8]

$$u = u_0 + \frac{\sin \theta}{\theta} [\alpha_0 \times r] + \frac{\cos \theta^{-1}}{\theta^2} (r \cdot \theta^2 - \alpha(\alpha, r)),$$

$$\alpha = \alpha_0,$$

где $\theta = \sqrt{(\alpha_0, \alpha_0)}$ – длина вектора α_0 , $(\quad, \quad)$ – скалярное произведение.

Применяется также и «промежуточный вариант»:

$$\text{положив } \frac{\sin \theta}{\theta} = 1, \quad \frac{\cos \theta^{-1}}{\theta^2} = -\frac{1}{2}, \text{ получим}$$

$$u = u_0 + [\alpha_0 \times r] - \frac{1}{2} (\theta^2 \cdot r - \alpha(\alpha, r)),$$

$$\alpha = \alpha_0.$$

Такое представление применяется при исследовании устойчивости систем с кинематическими связями [3.9]. Оно отличается от линейного наличием квадратичного слагаемого $\frac{1}{2} (\theta^2 \cdot r - \alpha(\alpha, r))$.

В главе 4 будут приведены примеры использования в компьютерных моделях элемента «абсолютно жесткое тело».

3.6 Определение геометрических характеристик сечений стержней

В докомпьютерный период, когда методы строительной механики стержневых систем были разработаны достаточно полно и инженеры в своем большинстве владели ими хорошо, решение задач теории упругости было уделом небольшой группы высококвалифицированных специалистов. Когда же появился МКЭ, то оказалось, что реализация расчета стержневых систем не менее сложна, чем пластинчатых и массивных систем. Это обусловлено большим количеством факторов, которые необходимо учесть в этом случае: шарниры, абсолютно жесткие вставки, разнообразие местных нагрузок, учет деформации сечений, углы чистого вращения, ну и конечно же определение характеристик самих сечений стержня.

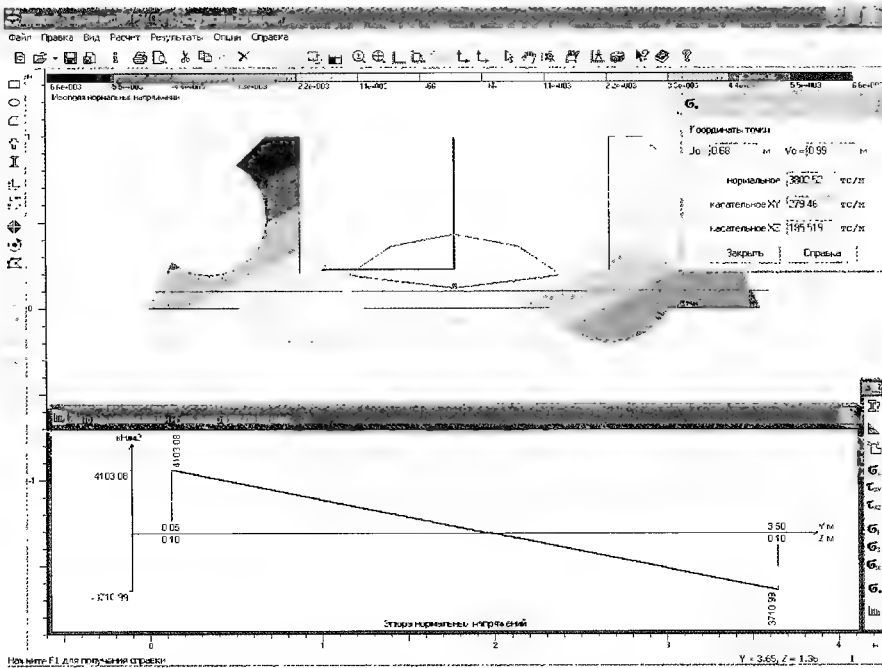


Рис. 3.12

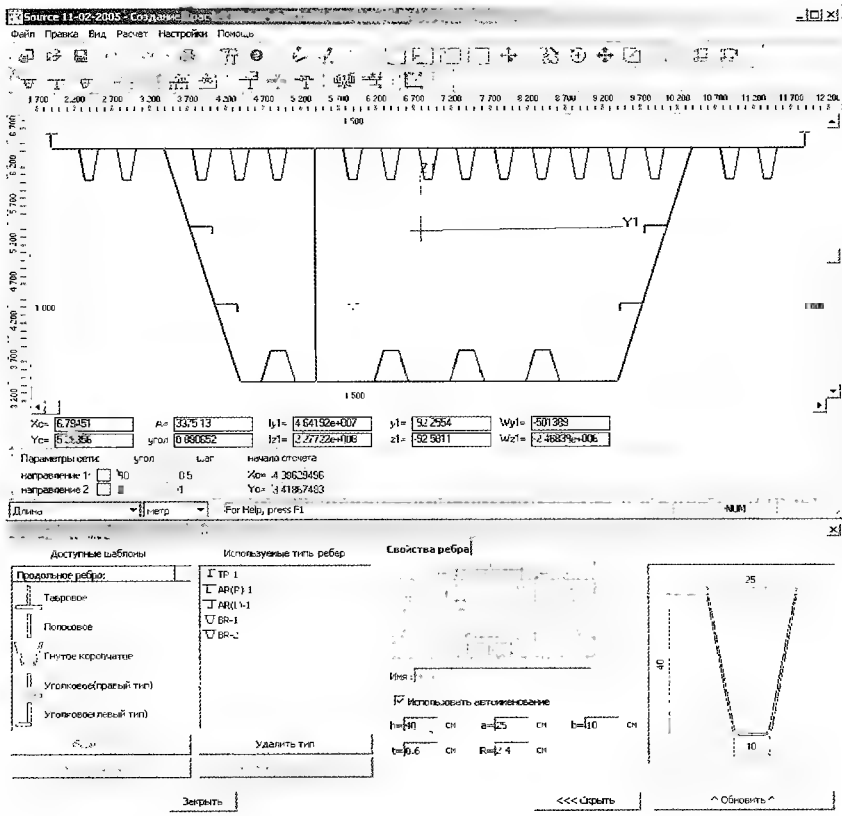


Рис. 3.13

Современные программные комплексы включают инструментарий для конструирования различных типов сечений. На рис. 3.12, рис. 3.13 и рис. 3.14 представлены три типа сечений, инструментарий для создания которых имеется в ПК ЛИРА. На рис. 3.12 представлено сечение массивного стержня, которое законструировано при помощи процедур логического сложения и вычитания площадей различных фигур.

На рис. 3.13 представлено сечение, полученное из набора прокатных и гнутых профилей. На рис. 3.14 представлено сечение представляющее собой тонкостенный профиль (показана эпюра секториальных координат).

Получение таких геометрических характеристик сечения как площадь F , координата центра тяжести y_c , z_c , направления главных центральных осей инерции, главные моменты инерции I_y , I_z и координаты вершин ядра сечения не представляют сложностей и производятся по известным алгоритмам, приведенным в курсах сопротивления материалов.

Вычисление момента инерции кручения $I_{кр}$, сдвиговых площадей F_y , F_z секторального момента инерции I_{co} , положение центра кручения и центра изгиба (сдвига) представляет достаточно сложную математическую задачу. Для получения этих характеристик, как правило, используется методика, основанная на теории Сен-Венана [3.10, 3.11].

Для вычисления указанных характеристик требуется определить три заданные области сечения Ω функции ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , первая из которых соответствует кручению, вторая и третья – сдвигу.

Согласно теории Сен-Венана функции ψ_i удовлетворяют в области Ω

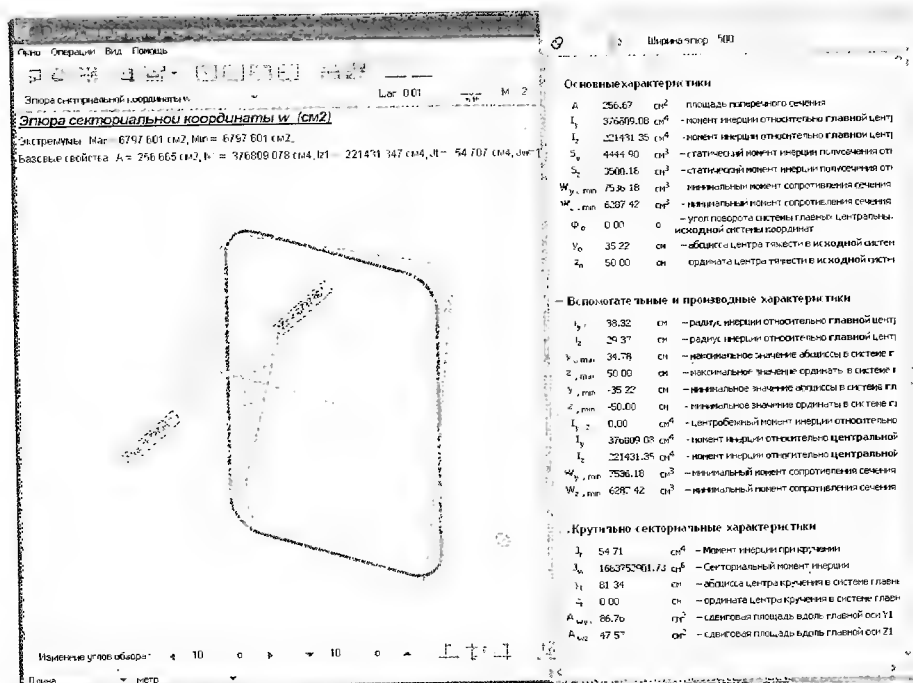


Рис. 3.14

уравнению $\Delta\psi_i = f_i$, а на границе Γ – области Ω граничному условию $\psi_{i,v} + g_i = 0$,

где $\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа,

$\psi_{i,v}$ – производная ψ по направлению нормали к границе Γ ,

$$\psi_v = \frac{\partial\psi}{\partial y} v_2 + \frac{\partial\psi}{\partial z} v_3,$$

(v_2, v_3) – единичный вектор нормали к Γ , $f_1=0, f_2=y, f_3=z$,

$$g_1 = yv_3 - zv_2$$

$$g_2 = [(y^2 - z^2)v_2 - 2yzv_3] \cdot \mu/4$$

$$g_3 = [2yzv_2 + (z^2 - y^2)v_3] \cdot \mu/4,$$

μ – коэффициент Пуассона.

В [3.12] предложен другой метод определения функций ψ_2, ψ_3 , однако он пригоден только для сечений, имеющих одну ось симметрии.

Рассмотрим по нашему мнению более универсальный подход к этой проблеме.

Функции ψ_i находятся методом конечных элементов из принципа возможных перемещений

$$\int_{\Omega} (\psi_{i,2} v_{,2} + \psi_{i,3} v_{,3} + f_i v) d\Omega + \int_{\Gamma} g_i v d\Gamma = 0.$$

По найденной ψ_1 , вычисляются [3.10, 3.13]:

$$\text{момент инерции кручения } I_{кр.} = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial\psi_{1,2}}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_{1,3}}{\partial z} + y \right)^2 \right] d\Omega,$$

$$\text{координаты центра кручения } y_o = - \int_{\Omega} z \psi_1 d\Omega / I_2, \quad z_o = \int_{\Omega} y \psi_1 d\Omega / I_3,$$

$$\text{бимомент инерции } I_{\omega} = \int_{\Omega} \psi_1^2 d\Omega - y_{2,0}^2 I_2 - z_{3,0}^2 I_3 - \left(\int_{\Omega} \psi_1 d\Omega \right)^2 / F$$

и координаты центра изгиба (сдвига)

$$\bar{y} = y_{2,0} + \frac{\mu}{2(1+\mu)I_2} \left[\int_{\Omega} y^3 d\Omega + \int \psi_1 y^2 v_3 d\Gamma \right]$$

$$\bar{z} = z_{3,0} + \frac{\mu}{2(1+\mu)I_3} \left[\int_{\Omega} z^3 d\Omega + \int \psi_1 z^2 v_2 d\Gamma \right].$$

Отметим, что для определения $I_{кр.}$ может использоваться [3.11] функция χ , связанная с ψ_1 соотношениями

$$\chi_{13} = \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial y} - z, \quad \chi_{12} = - \left(\frac{\partial \psi_{1,3}}{\partial z} + y \right).$$

Она удовлетворяет уравнению $\Delta \chi = -2$ и нулевому граничному условию (для односвязной области). При наличии отверстий граничные условия усложняются.

$$\text{С помощью функции } \chi \text{ определяется } I_{кр.} = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega,$$

однако, вычисление координат центров кручения и изгиба (сдвига), а также определение I_{ω} не представляются возможным.

Сдвиговые площади F_y, F_z , вычисляются по функциям ψ_2, ψ_3 .

Обозначим

$$\eta_{22} = \frac{\mu(y^2 - z^2)}{4} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \quad \eta_{33} = \frac{\mu(z^2 - y^2)}{4} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z}$$

$$\eta_{23} = \frac{\mu yz}{2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \quad \eta_{23} = \frac{\mu yz}{2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}$$

$$q_2 = \int_{\Omega} (h_{32}^2 + h_{33}^2) d\Omega \quad q_3 = \int_{\Omega} (h_{22}^2 + h_{23}^2) d\Omega$$

Тогда [3.13]

$$F_y = q_2 / (I_2(1+\mu))^2, \quad F_z = q_3 / (I_3(1+\mu))^2$$

По найденным характеристикам и заданным усилиям можно вычислить значения напряжений $\tau_x = \tau_{1,1}$, $\tau_{xy} = \tau_{1,2}$ и $\tau_{xz} = \tau_{1,3}$ в любой точке сечения по формулам [3.10]

$$\tau_x = \frac{N_1}{F} + X_2 \cdot \frac{M_3}{I_3} - X_3 \frac{M_2}{I_2}$$

$$\tau_{x,y} = M_1(\psi_{1,2} - x_3) - \left(\frac{N_2}{I_3} h_{22} + \frac{N_3}{I_2} h_{32} \right) / 1 + \mu$$

$$\tau_{x,z} = M_1(\psi_{1,3} - x_2) - \left(\frac{N_2}{I_3} h_{23} + \frac{N_3}{I_2} h_{33} \right) / 1 + \mu$$

и настроить их изополя.

Изложенная выше методика естественно распространяется на тонкостенное сечение.

Область такого сечения разбивается на прямоугольные полосовые конечные элементы. Для вычисления характеристик при кручении и сдвиге искомые функции $\varphi_i(y, z)$ на каждом прямоугольнике представляются в виде

$$\varphi_i(y, z) = \varphi_{i,1}(y) + z \varphi_{i,2}(z)$$

ось y направлена вдоль длинной стороны, ось z – вдоль короткой, «тонкостенной».

$$\text{Тогда } \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = \varphi'_{i,1}(y) + z \varphi_{i,2}(y)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = \varphi_{i,2}(y)$$

Подставив эти формулы в уравнение принципа возможных перемещений, получим уравнение МКЭ для определения функций φ_i .

Характеристики тонкостенного сечения вычисляются по найденным φ_i так же, как в общем случае.

Исследованию тонкостенных сечений в докомпьютерный период (и сейчас!) посвящено большое количество монографий и статей, в которых отдельно рассматривались случаи открытых, замкнутых и полужамкнутых профилей и для каждого из них предлагались оригинальные и часто изящные, к сожалению не универсальные методы вычисления геометрических характеристик. Предложенный выше подход является, по нашему мнению, универсальным.*

3.7 Определение усилий и напряжений

Процедура вычисления напряжений (усилий) по МКЭ в перемещениях в общем то достаточно прозрачна: в результате решения

* В ПК ЛИРА реализован именно универсальный метод

уравнений (2.7) определяются значения узловых неизвестных, на основании которых и принятых базисных функций по формуле (2.4) определяется непрерывное поле приближенных значений перемещений u_h и затем приближенное значение напряжений $\sigma_h = DBu_h$. Проблема заключается в том, что оператор дифференцирования B понижает точность вычисления σ_h и обуславливает разрывность полей напряжений по линиям сопряжения КЭ. А ведь именно напряжения (усилия) в первую очередь интересуют пользователя. Поэтому именно эти два фактора (пониженная точность и разрывность полей напряжений) являются основными побудителями в поисках альтернативных методов МКЭ в перемещениях. С другой стороны в многочисленных работах предпринимаются отчаянные попытки хоть как-то повысить точность вычисления σ_h , хотя кардинальных решений здесь ждать не приходится, так как от убийственного влияния оператора B вряд ли удастся освободиться. Поэтому подробное перечисление многочисленных приемов, по-видимому, не имеет особого смысла, хотя кратко остановиться на наиболее характерных, стоит. Как правило, основой построения полей σ_h являются значения напряжений, вычисленные в центрах Ω_r .

В некоторых программных комплексах пользователю доступна процедура вычисления напряжений в любой произвольной точке КЭ. Такая процедура может принести неискушенному пользователю больше вреда, чем пользы. Можно ему только посочувствовать, когда, определив напряжение в одной и той же точке, лежащей на границе двух КЭ на основе u_h этих КЭ, получит разные (иногда даже по знаку) значения. В лучшем случае он будет недоумевать, в худшем – посчитает МКЭ несостоятельным.

Иногда используются значения σ_h в точках, соответствующих узлам квадратурных формул Гаусса (численного интегрирования), иногда пользуются средними значениями $\sigma_h = \int_{\Omega_r} \sigma_h d\Omega / \Omega_r$. В [3.18] описан метод

Барлоу, предлагающий определять σ_h в некоторых точках, имеющих минимальную погрешность, хотя нахождение этих точек затруднено.

В [3.19] предлагается строить на звезде элементов полином, аппроксимирующий полученные МКЭ узловые перемещения методом наименьших квадратов, а затем вычислить напряжения в центральном узле по формулам теории упругости.

Известны также методы [3.20, 3.21, 3.22] построения непрерывной по всей области функции τ_h , аппроксимирующей полученные МКЭ усилия σ_h , аппроксимация ищется в виде:

$$\tau_h(x) = \sum \tau_q \psi_q(x),$$

где ψ_q – непрерывные базисные функции, τ_q – неизвестные коэффициенты, которые определяются из условия минимума некоторого

функционала. Например, при использовании метода сопряженных аппроксимаций [3.21] минимизируется функционал $\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tau_h - \sigma_n, \tau_h - \sigma_n) d\Omega$

Метод двух функционалов [3.20] состоит в поиске минимума функционала $\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tau_h - \sigma_n, B^{-1}(\tau_h - \sigma_n)) d\Omega$ на множестве функций τ_h , удовлетворяющих статическим граничным условиям.

Условиями минимума этих функционалов является система уравнений, аналогичная системе МКЭ в перемещениях.

В качестве нагрузки выступает напряжение, найденное по МКЭ в перемещениях, в качестве узловых неизвестных – значения напряжений в узлах.

Эти методы требуют решения системы уравнений, порядок которых, как правило, превосходит порядок уравнений МКЭ для соответствующей задачи.

Попытки доказать, что какой-либо из перечисленных методов определяет напряжения более точно, как нам известно, пока не увенчались успехом. Поэтому на практике, обычно, отдается предпочтение более прозрачным и легким в реализации приемам. Так, большинство программных комплексов использует следующий прием сглаживания σ_h :

- определяются значения σ_h в центрах КЭ
- определяются значения σ_h в узлах с весовыми коэффициентами, обратно пропорциональными расстояниям от узла до центров КЭ, входящих в звезду этого узла
- для построения изополей и изолиний производится интерполяция по значениям σ_h в узлах конечно-элементной сетки.

Изложенные выше методы вычисления и сглаживания усилий применяются для плоских и объемных элементов.

При вычислении усилий в стержнях целесообразно применять методы механики стержневых систем, которые дают точные значения усилий.

3.8 Организация расчета конструкций с учетом изменения расчетных схем в процессе возведения

Идея организации такого расчета чрезвычайно проста [3.14]:

- строится последовательность расчетных схем, каждая из которых соответствует определенному этапу возведения
- усилия, определенные на n этапе сохраняются для всех последующих этапов (эффект «замораживания» напряжений)
- усилия на $n+1$ этапе определяются для измененной схемы с учетом вновь добавленных (убранных) элементов на

дополнительную нагрузку, появившуюся (исчезнувшую) на этом этапе (рис. 3.15)

- моделирование снятия элемента на $n+1$ этапе реализуется приложением нагрузок на оставшуюся часть конструкции, соответствующих усилиям в снятом элементе на n этапе. Моделирование снятия нагрузки реализуется приложением соответствующей нагрузки с обратным знаком к расчетной схеме на $n+1$ этапе (рис. 3.15)
- расчет на эксплуатационные нагрузки производится для окончательной конструктивной схемы только на дополнительные эксплуатационные нагрузки (так как, например, собственный вес был учтен при расчете на стадиях возведения)

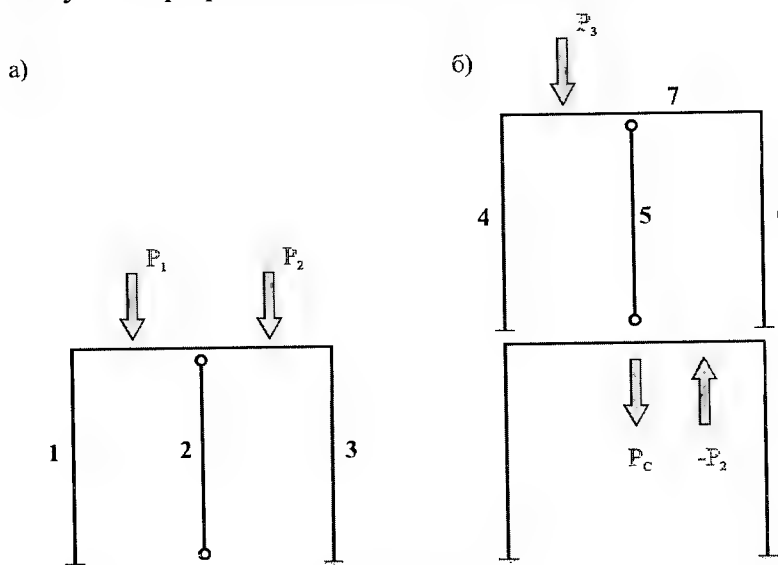


Рис. 3.15

На всех стадиях расчета (этапы возведения, этапы эксплуатации) производится подбор (проверка) конструктивных элементов. Зачастую может оказаться, что на стадиях возведения усилия в некоторых элементах могут значительно превосходить соответствующие усилия на эксплуатационной стадии. Безусловно, желательной является возможность учета на каждом этапе (а такой подход в определенной степени претендует на классификацию – «моделирование жизненного цикла конструкции») физической и геометрической нелинейности, что особенно важно для таких ответственных сооружений как большепролетные покрытия, мосты и др. Очень привлекательной является представленная программным комплексом возможность учета изменения жесткостных и прочностных свойств материала на различных этапах расчета. Это может оказаться полезным при необходимости учета, например, свойств железобетона при изменении климатических условий (замерзание, размораживание бетонной смеси). В главе 4 будут приведены примеры моделирования процесса

возведения большепролетного мембранного покрытия и высотного здания, проведенные по ПК ЛИРА.

3.9 Расчетные сочетания усилий (PCY) Расчетные сочетания нагрузений (PCN)

Решение задачи об определении наиболее опасных сочетаний нагрузений обеспечивает взаимосвязь между результатами расчета сооружения на различные нагрузения и конструированием его элементов.

В общем случае полное количество сочетаний нагрузений достигает числа 2^n , где n —число нагрузений. Практически это означает, что для рассчитываемой конструкции необходимо найти 2^n напряженно-деформированных состояний, а это неприемлемо даже при использовании современной техники. Уже при сравнительно небольшом значении n достижение результата становится затруднительным, а объем его — необозримым. В связи с этим возникает следующая задача: найти критерий, на основании которого можно было бы ограничить количество рассматриваемых сочетаний нагрузок до числа m ($m \ll 2^n$). Конструирование, выполненное на основании m сочетаний, должно обеспечить прочность конструкции для всех 2^n сочетаний.

В докомпьютерный период отбор m невыгодных сочетаний проводится для каждого сечения стержня на основании критериев типа $N_{\max} + M_{\text{соотв.}}$, $M_{\max} + N_{\text{соотв.}}$ и т.д. и т.п. Этот критерий имел ряд изъянов. Например, если в сечении имеются усилия от двух нагрузений

$$N_1 = -100; M_1 = -10; N_2 = +10; M_2 = +100,$$

то для большинства типов сечений невыгодным является сочетание, представляющее собой сумму усилий от двух нагрузений т.е. $N_1 = -90$ и $M_1 = +90$, которое не будет выявлено по приведенному выше методу. Это было сразу выявлено разработчиками первых компьютерных программ для массового применения [3.5], в которых использовался принцип экстремальных напряжений. В дальнейшем этот принцип был обобщен на основе принципа упругого потенциала в работах [3.16, 3.17].

При определении PCY учитываются особенности упругого потенциала, характерные для сечений стержней, пластин, оболочек и объемных тел. Эти особенности позволяют выразить решение задачи через критерий экстремальных напряжений в характерных точках сечений. Благодаря этому количество рассматриваемых сочетаний ограничивается еще более существенно.

Критерии для сечения стержня. В качестве критерия определения PCY здесь приняты экстремальные значения нормальных и касательных напряжений в контрольных точках

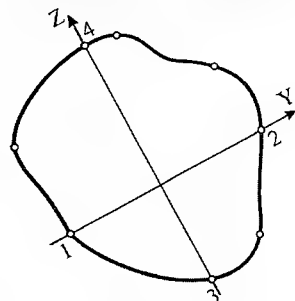


Рис. 3.16

сечения (рис. 3.16).

Для критерия по нормальным напряжениям можно использовать известную из сопромата формулу:

$$\sigma_k = \frac{N}{F} - \frac{M_y}{J_y} Z_k + \frac{M_z}{J_z} Y_k$$

Для критериев по касательным напряжениям может использоваться приближенная формула

$$\tau_k = \frac{1}{2F} \left(Q + \frac{M_{кр.}}{n+b} \right)$$

где N, M_y, M_z, Q (Q_y или Q_z), $M_{кр.}$ – усилия в сечении;
 I_y, I_z, F – моменты инерции и площадь сечения;
 h и b – расстояния между контрольными точками, лежащими на пересечении главных осей инерции и контура (на рис. 3.16 $h=l/34$, $b=l/12$).

Выбор контрольных точек – задача не очень простая. Здесь надо руководствоваться различными соображениями, например, о том, что в состав контрольных точек должны быть включены наиболее отдаленные от центра тяжести точки контура. В ПК ЛИРА контрольные точки для наиболее часто встречающихся параметрических сечений входят в состав характеристик этих сечений.

Критерии для плоского напряженного состояния. В общем случае главные напряжения в одной и той же точке конструкции для разных нагружений имеют различную ориентацию. Поэтому здесь определение РСУ производится по огибающим экстремальным кривым нормальных и касательных напряжений по формулам:

$$\sigma_{\alpha_n} = N_x \cos^2 \alpha_n + N_z \sin^2 \alpha_n + T_{xz} \sin 2\alpha_n$$

$$\tau_{\alpha_n} = \frac{1}{2} (N_z - N_x) \sin 2\alpha_n + T_{xz} \cos 2\alpha_n$$

где n – номер нагружения.

Обозначения приведены на рис. 3.17.

Критерии для тонких плит. Здесь применяется подход, аналогичный тому, который описан для плоского напряженного состояния. Изгибные и крутящий моменты в плите дают возможность определить нормальные и касательные

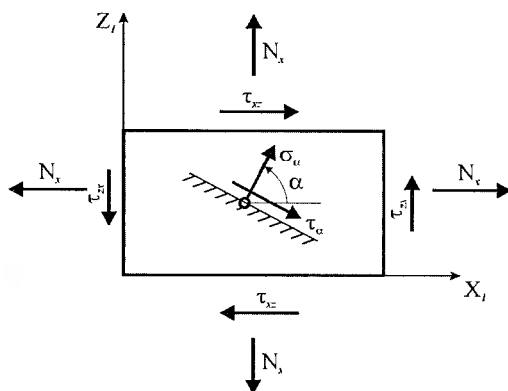


Рис. 3.17

напряжения на верхней и нижней поверхностях плиты. Эти напряжения по модулю равны, поэтому формулы приобретают вид:

$$M_{\alpha_n} = M_x \cos^2 \alpha_n + M_y \sin^2 \alpha_n + M_{xy} \sin 2\alpha_n$$

$$M_{\alpha_n} = \frac{1}{2}(M_y - M_x) \sin 2\alpha_n + M_{xy} \cos 2\alpha_n$$

Критерии для оболочек. Здесь также возможен аналогичный подход. Напряжения вычисляются на верхней и нижней поверхностях оболочки. При этом учитываются мембранные напряжения и изгибающие усилия по следующим зависимостям:

$$\sigma_{x^{\text{H/B}}} = N_x \pm \frac{6M_x}{h^2}, \quad \sigma_{y^{\text{H/B}}} = N_y \pm \frac{6M_y}{h^2}, \quad \tau_{xy^{\text{H/B}}} = T_{xy} \pm \frac{6M_{xy}}{h^2}$$

где: h – толщина оболочки;

B и H – индексы, означающие принадлежность к верхней и нижней поверхностям.

Критерии для трехмерного напряженного состояния. Критерием для определения опасных сочетаний напряжений в общем случае НДС приняты экстремальные значения среднего напряжения (гидростатического давления) и главных напряжений девиатора. Определяются углы наклона главных напряжений в каждом элементе для каждого нагружения. Вычисление производится по формулам:

$$\sigma_{\Phi} = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{xz} ln + 2\tau_{yz} mn;$$

$$S_x = \sigma_x - \sigma_0; \quad S_y = \sigma_y - \sigma_0; \quad S_z = \sigma_z - \sigma_0;$$

$$S_{\Phi} = S_x l^2 + S_y m^2 + S_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{xz} ln + 2\tau_{yz} mn;$$

где:

σ_{Φ} – нормальное напряжение на площадке с направляющими косинусами l, m, n к осям XI, YI, ZI ;

S_{Φ} – нормальное напряжение девиатора на этой же площадке;

$$\sigma_0 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{3} \text{ – среднее напряжение.}$$

При включении в критерий напряжений от того или иного нагружения необходимо руководствоваться здравым смыслом и указаниями нормативных материалов. Так, например, ветер слева и справа, безусловно, являются взаимоисключающими нагружениями, торможение от крана в промышленном цехе на какую-либо колонну может присутствовать только при наличии вертикальной крановой нагрузки, в соответствии со строительными нормами на нагрузки и воздействия, ветер не должен присутствовать при наличии сейсмического воздействия,

количество одновременно действующих временных нагрузок ограничено и т.д. и т.п. При том, что РСУ практически исключает неучет невыгодных сочетаний, этот подход имеет ряд недостатков. Во-первых, нельзя построить для РСУ деформированную схему, эпюры усилий и изополя напряжений, так как нагружения, входящие в РСУ для различных элементов не коррелированы, а это затрудняет анализ РСУ. Во-вторых (и это, пожалуй, главный недостаток), РСУ жестко привязаны к принципу суперпозиции, а это значит, что расчет может быть проведен только в линейно-упругой постановке. А это в настоящее время может быть просто неприемлемым. Например, новые нормы России по железобетону регламентируют обязательный расчет с учетом реологических свойств железобетона, т.е. с учетом физической нелинейности.

Другой подход, основанный на составлении расчетных сочетаний нагружений широко распространен в странах Европы и США. Так, например, если на сооружение действуют собственный вес (Т), ветер (В), эксплуатационное нагружение (Э) и снег (С), то согласно Еврокоду сооружение необходимо рассчитать на следующие сочетания нагружений (приводится только часть РСН):

$$РСН\ 1=1,35T+1,5Э$$

$$РСН\ 2=1,35T\pm 1,5В$$

$$РСН\ 3=1,35T+1,5Э\pm 0,9В$$

$$РСН\ 4=1,35T\pm 0,9В+1,5С$$

$$РСН\ 5=1,35T+1,5Э\pm 0,9В+0,9С$$

Несмотря на то, что вероятность упущения опасных сочетаний для некоторых элементов по сравнению с РСУ возрастает, возможность визуальных результатов расчета для определенного РСН, а также (что очень важно) возможность проведения расчета в нелинейной постановке (в данном случае РСН можно трактовать как отдельное нагружение) делает этот подход в настоящее время более привлекательным. Конечно, программный комплекс, уважающий чаяния пользователя должен предоставлять ему возможность использовать оба подхода.

3.10 Конструирующие системы

По сути, целью каждого расчета является получение ответа на вопрос, отвечает ли запроектированная система условиям прочности и устойчивости, а для этого необходимо проверить или подобрать сечения элементов из того или иного материала. В каждом программном комплексе эта проблема решается по-разному с той или иной детализацией. Очень распространен подход стыковки конечно-элементного программного комплекса со специализированными конструирующими системами. Так для ПК ЛИРА разработаны многочисленные конверторы с такими программами как PROMET, HYPER-STEEL, PROSTEEL – проектирование стальных конструкций, «ОМ СНиП Железобетон» – расчет

железобетонных сечений и др. Вместе с тем, практически во всех программных комплексах ориентированных на строительные сооружения имеются встроенные конструирующие системы.

Так, например, в ПК ЛИРА имеются две встроенные конструирующие системы:

- ЛИР-СТК – для расчета и проектирования стальных конструкций
- ЛИР-АРМ – для расчета и проектирования железобетонных конструкций

В табл. 3.1 приведены сечения и процедуры, которые их обрабатывают (подбирают или проверяют) в рамках системы ЛИР-СТК.

Таблица 3.1

Элементы	 Двутавр	 Составной двутавр	 Швеллер	 Коробка из швеллеров	 Раздвинутые двутавры	 Коробка из двутавров
Ферменные элементы	—	—	+	+	—	—
Изгибаемые	+	+	+	+	—	+
Внецентренно-сжатые	+	+	+	+	+	+

Элементы	 Два уголка	 Крестовые уголки	 Уголок	 Труба	 Два швеллера	 Два швеллера
Ферменные элементы	+	+	+	+	+	—
Изгибаемые	—	—	—	—	+	—
Внецентренно-сжатые	—	—	—	+	+	+

Элементы	 Профиль «Молодечно» Коробка из швеллеров	 Короб составной	 Несимметричный двутавр	 Квадрат	 Круг	 С-образный профиль
Ферменные элементы	+	—	—	+	+	+
Изгибаемые	+	+	—	+	+	+
Внецентренно-сжатые	+	+	+	+	+	+

Элементы	 Тавр	 Угловое сечение	 Канат
Ферменные элементы	+	—	—
Изгибаемые	+	—	—
Внецентренно-сжатые	+	+	—
Канаты	—	—	+

В рамках системы ЛИР-АРМ подбираются и проверяются различные сечения (прямоугольные, тавровые, уголковые, крестовые, круглые, коробчатые, кольцевые) железобетонных элементов (балок и колонн) с различными типами армирования – симметричное, несимметричное, с выделением угловых стержней и т.п. В этой же системе имеется возможность получить эскизы рабочих чертежей для колонн и балок (рис. 3.18).

Разработка конструирующих систем связана с рядом трудностей, основные из которых это необходимость из всего набора конечных элементов выделить элементы, относящиеся к тому или иному конструктивному элементу.

Так, например, балка может состоять из нескольких конечных элементов стержней, которые были введены в расчетную схему. Подбор же сечений этих элементов должен быть выполнен в строгой взаимосвязи, так как, например, недопустимо, что бы сечения одного конструктивного элемента были бы подобраны из разных профилей.

Много проблем возникает в связи с необходимостью унификации конструктивных элементов и мн. др. Модным и пожалуй востребованным в настоящее время является режим трассировки, когда по желанию пользователя может быть получен набор формул, по которым выполнен подбор или проверка сечений, элементов, узлов и т.п. На рис. 3.19 приведен пример трассировки для подбора элемента (сварного шва) узла примыкания ригеля к колонне (система ЛИР-СТК в ПК ЛИРА).

Встроенные конструирующие системы играют важную роль при организации экспертных систем для интеллектуальных программных комплексов. Так в ПК МОНОМАХ для расчета и проектирования конструкций из монолитного железобетона высотных зданий имеется экспертная система, позволяющая на всех этапах автоматизированного проектирования давать пользователю подсказки о принятых конструктивных решениях (элемент не проходит, элемент переармирован, элемент имеет излишние запасы прочности, не обеспечена нормативная деформативность и т.п.).



Рис. 3.18

Проверка: Шов Ш1

N_x^* , кН	M_y , кНм	Q_z^* , кН	M_z , кНм	Q_y , кН
154.9	-255.9	85.69	0	0

KI_w – процент использования шва:

Поскольку условие ($\beta_f k_f < \beta_z k_f$) – удовлетворяется, то

$$KI_w = KI_{wf}$$

то есть условие ($0.7 \cdot 10 < 1 \cdot 10$) – удовлетворяется, то

$$KI_w = 98.69 \% [11.5]$$

Здесь:

$KI_{wf} = 98.69 \% [11.5]$ – процент использования шва по металлу шва

$\beta_f = 0.7$ Таблица 34* – коэффициент, учитывающий технологию сварки

$k_f = 10 \text{ мм}$ – катет сварного шва

$\beta_z = 1$ Таблица 34* – коэффициент, учитывающий технологию сварки

KI_{wf} – процент использования шва по металлу шва:

$$KI_{wf} = (\tau_f / R_{wf} \gamma_{wf} \gamma_c / \gamma_n) \cdot 100$$

$$KI_{wf} = (177.6 / 180 \cdot 1 \cdot 1 / 1) \cdot 100 = 98.69 \% [11.5]$$

Здесь:

$\tau_f = 177.6 \text{ МПа}$ – напряжение в расчетном сечении по металлу шва

$R_{wf} = 180 \text{ МПа}$ – расчетное сопротивление угловых швов срезу (условному) по металлу шва

$\gamma_{wf} = 1$ – коэффициент условий работы шва

$\gamma_c = 1$ – коэффициент условий работы

$\gamma_n = 1$ – коэффициент надежности по назначению

τ_f – напряжение в расчетном сечении по металлу шва:

$$\tau_f = (\tau_{Qz}^2 + (|\sigma_{My}| + |\tau_N|)^2)^{0.5}$$

$$\tau_f = (48.97^2 + (|82.26| + |88.49|)^2)^{0.5} = 177.6 \text{ МПа}$$

Здесь:

$\tau_{Qz} = 48.97 \text{ МПа}$ – напряжение от поперечной силы Q

$\sigma_{My} = 82.26 \text{ МПа}$ – нормальные напряжения

$\tau_N = 88.49 \text{ МПа}$ – напряжение в шве от продольной силы N

$k_f = 10 \text{ мм}$ – катет сварного шва

$L_e = 100 \text{ мм}$ – длина элемента

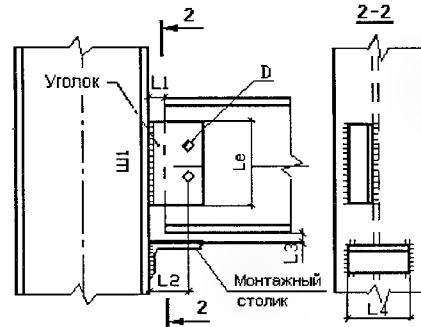


Рис. 3.19

Литература к главе 3

- 3.1 Сосис П.М. Статически неопределимые системы. -К.:Будівельник, 1968. -310с.
- 3.2 Писсанецки С. Технология разреженных матриц. -М.: Мир, 1988. - 411с.
- 3.3 Городецкий А.С. Численная реализация метода конечных элементов.//В кн. «Соппротивление материалов и расчет сооружений». -К.:Будівельник, 1968. -С. 31-42.
- 3.4 Фиалко С.Ю. Агрегатный многоуровневый метод конечных элементов для анализа больших задач – моделей строительных зданий и сооружений.//Вісник Одеського національного морського університету, 2003, -№10. -С. 112-118.
- 3.5 Городецкий А.С., Горбовец А.В. «Мираж» – программа для расчета стержневых, пластинчатых и массивных конструкций методом конечных элементов на ЭВМ «МИНСК-22». -К.:Препринт УкрНИИпроект, 1970. -94с.
- 3.6 Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лещенников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы. - М.: Стройиздат, 1981. -512с.
- 3.7 Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов. -М.: Наука, 1989. -288с.
- 3.8 Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач.- М.: Мир, 1980. -512с.
- 3.9 Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. -К.: Сталь, 2002. - 597с.
- 3.10 Лурье А.И. Теория упругости. -М.: Наука, 1970. -547с.
- 3.11 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. -М.: Наука, 1987. - 246с.
- 3.12 Тимошенко С.П., Гудьер Д.И. Теория упругости. -М.: Наука, 1975. -576с.
- 3.13 Васиузу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. -М.: Мир, 1987. -542с.
- 3.14 Гильман Г.Б., Борисенко В.С. Расчет пространственных систем с изменяющейся в процессе нагружения расчетной схемой.//ЭВМ в исследованиях и проектировании объектов строительства, вып. 3. – К.:КиевЗНИИЭП, 1973. –С. 27-37.
- 3.15 Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. -Санкт-Петербург: Изд-во СПбГТУ, 1998. -531с.
- 3.16 Стрелец-Стрелецкий Е.Б. Расчетные сочетания напряжений для конструкций типа балки-стенки и плиты.//Строительная механика и расчет сооружений, 1986. -№3. –С. 36-38.

- 3.17 Стрелец-Стрелецкий Е.Б. Методы определения опасных комбинаций напряжений при оценке прочности элементов конструкций.//Дисс. канд. техн. наук: 01.02.03. –М.: ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 1987. -125с.
- 3.18 Стренг Г., Фикс Д. Теория метода конечных элементов. -М.: Мир, 1977. -349с.
- 3.19 Вовкушевский А.В. О вычислении напряжений при решении задач теории упругости МКЭ.//Л.: Энергия. Известия ВНИИГ, 1979, - т 133.
- 3.20 Сливкер В.И. Метод Ритца в задачах теории упругости, основанный на последовательной минимизации двух функционалов.//М.: Известия АН СССР, МТТ, -№2, 1982. –С. 57-65.
- 3.21 Oden J.T., Reddy J.N. Note on approximate nut hog for computing consistent conjugate stresses in elastic finite element.// Int. S. Numer. Meth. Eng. -1973. -v. 6. -№ 1. –P. 55-61.
- 3.22 Loubignac G., Cantin G., Touzot G. Continnous Striess Fields in Finite Element Analysis.//AIAA Journal. -1977. -v. 15. -№ 11. –P. 1645-1647.

Глава 4 Компьютерные модели.

Построение, анализ, опыт, возможные ошибки, рекомендации

4.1 Построение конечно-элементных моделей

Построение конечно-элементной модели, также как и любой расчетной схемы, начинается с идеализации конструкции. Этот этап настолько привычен и естественен для инженера, что, как правило, он выполняется подсознательно, хотя полезно иногда осмыслить выполняемые действия. Вот основные составляющие этого этапа:

Идеализация геометрии – назначение основных размеров, которые могут несколько отличаться от натуральных с целью придания возможной регулярности для сокращения задания исходной информации и дальнейшего обеспечения анализа результатов; в случае принятия стержневой или пластинчатой схемы – замена стержней на «проволочную» систему, а пластин на плоскостную систему, не имеющую поперечных размеров (здесь также возможны отступления, допустимость которых определяет инженер, принятые оси стержней и пластин могут не совпадать с их нейтральными плоскостями), различные конструктивные включения (например, консоли) могут быть проигнорированы и мн.др.

Идеализация нагрузки – существует мнение, что правая часть в неравенстве

$$\text{несущая способность} > \text{нагрузка}$$

изучена значительно меньше, чем левая часть. Такое мнение, по крайней мере, очень упрощено. Во-первых, левая часть зависит от значительно большего количества факторов (свойства материала, геометрия, конструктивные решения и мн. др.). Во-вторых, нагрузки бывают разные – хорошо или слабо поддающиеся изучению. Например, что может быть лучше изученным, чем нагрузка от собственного веса, в то же время можно ли вообще в рамках детерминистического подхода адекватно представить нагрузки от ветрового или сейсмического воздействия, которые носят ярко выраженный вероятностный характер. Такие различные степени изученности нагрузок находят отражение в строительных нормах в различных значениях коэффициентов надежности: Для хорошо изученных нагрузок он невелик (для собственного веса – 1.1), для слабоизученных – он имеет большее значение (например, для ветровой нагрузки – 1.4).

Во всяком случае, понимая, что степень идеализации нагрузки различна, инженер должен по-разному строить свои размышления: если в нагрузке превалирует собственный вес, он может ограничиться традиционными подходами, если превалирует слабо изученная нагрузка он должен стремиться получать как можно больше информации из

различных расчетных схем (несколько расчетных схем моделирующих те или иные свойства конструкции, расчет по деформированной расчетной схеме, учет физической и геометрической нелинейности, если динамическая составляющая воздействия существенна – использование современных методов прямого интегрирования и т.д.), чтобы его размышления о надежности конструкции были как можно более информативными.

Моделирование свойств материала.

В настоящее время наиболее распространена идеализация свойств материала, связанная с введением гипотезы о линейной упругости. Выше уже многократно указывалось, что введение такой грубой гипотезы лишает возможности моделирования различных очень важных факторов (перераспределение усилий и напряжений, моделирование процесса напряжений, моделирование процесса нагружения, приспособляемости конструкций и мн. др.). Поэтому, если инженер стремится глубже проникнуть в природу работы конструкции, он может принять гипотезу о нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями. В настоящее время хорошо разработан и математически обоснован аппарат, основанный на гипотезе нелинейной упругости (ветвь нагрузки и разгрузки совпадает) и гипотеза активного нагружения (при увеличении нагрузки увеличиваются деформации).

Инженер, применяющий этот аппарат должен понимать, что это тоже идеализация свойств материала (не учитывается возможность несовпадения разгрузочных и нагрузочных ветвей, не учитывается возможность уменьшения деформаций и перемещений в отдельных областях конструкции при увеличении нагрузки и мн. др.). Вместе с тем в отличие от очень по современным меркам грубой гипотезы о линейной упругости этот аппарат может дать массу полезнейшей информации для размышления над обеспечением прочности и надежности конструкции.

Идеализация отдельных конструктивных решений.

Идеализация конструктивных решений во многих случаях связана с идеализацией геометрии. Однако, в ряде случаев она имеет самостоятельное значение. В природе не существует ни «чистых» шарниров, ни «абсолютно жесткого» соединения элементов. Поэтому, инженер должен принять решение о то, как идеализировать отдельные конструктивные узлы, чтобы максимально адекватно смоделировать их действительную работу.

Важным вопросом идеализации является принятые решения о возможности расчета по деформированной схеме. Рамы, плиты, балки небольших пролетов, как правило, рассчитываются по недеформированной схеме. Тенты, мембраны, вантовые конструкции надо рассчитывать по деформированной схеме. Однако имеется целый ряд конструкций, для которых изменение геометрии может существенно повлиять на

напряженно-деформированное состояние и инженер в этом случае должен принять соответствующее решение.

Вообще, вопрос идеализации конструктивных решений очень многозначен, и невозможно охватить это многообразие. Важно, чтобы инженер всегда понимал, что осуществляя построение компьютерной модели он идеализирует конструкцию и всегда должен оценивать адекватность этой идеализации.

Выбор типов конечных элементов и построение конечно-элементной сетки.

При решении практических задач часто возникают вопросы, связанные с выбором типа элемента. Ведь для решения одной и той же задачи (например, изгиба плиты) существует целый набор конечных элементов, имеющих различные свойства.

К сожалению, в программных комплексах могут встречаться конечные элементы, не имеющие сходимости (конечный элемент плиты Пшеменицкого, треугольник Зенкевича и др.), т. е. при сгущении сетки как будто бы имеется сходимость к какому-то решению, но это решение может отстоять очень далеко от точного. Поэтому при использовании какого-либо программного комплекса пользователь должен убедиться, что для всех КЭ этого комплекса проведены исследования и получены оценки порядка сходимости по перемещениям и напряжениям. В таблице 4.1 приведены такого типа оценки для наиболее распространенных конечных элементов.

Табл. 4.1

Тип конечного элемента	Моделируемая группа усилий	Порядок сходимости		Тип базисных функций	Степени свободы
		t_u	t_σ		
Стержень	изгибающие моменты	точное	точное	балочные	u, v, w
	нормальные усилия	точное	точное	линейные	α, β, γ
Треугольный элемент плиты	изгибные	2	1	балочные*	w, α, β
Прямоугольный элемент плиты (Клафа)	изгибные	2	2	балочные*	w, α, β
Треугольный элемент балки-стенки	мембранные	2	1	полилинейные	u, v
Прямоугольный элемент балки-стенки	мембранные	2	1	полилинейные	u, v
Треугольный элемент оболочки	изгибные	2	1	балочные*	w, α, β
	мембранные	2	1	полилинейные	u, v
Прямоугольный элемент оболочки	изгибные	2	2	балочные*	w, α, β
	мембранные	2	1	полилинейные	u, v
Треугольный элемент плиты на упругом основании	изгибные	2	1	балочные*	w, α, β
Прямоугольный элемент плиты на упругом основании	изгибные	2	2	балочные*	w, α, β
Стержень на упругом основании	изгибные	4	2	балочные	u, v, w α, β, γ
Стержень с учетом сдвига	изгибные	4	2	балочные	u, v, w α, β, γ

Примечание к табл. 4.1

u, v, w (α, β, γ) обозначают линейные (угловые) перемещения по направлениям (относительно) осей x, y, z .

Под балочными функциями понимается функция перемещений аналогичная перемещениям по длине стержня от единичных перемещений его концов.

* Имеется ввиду, что балочные функции реализуются только на контуре этих элементов

Опыт показывает, что целесообразнее использовать более высокоточные конечные элементы, т.е. имеющие более высокую (t) оценку погрешности, даже в случае если они имеют расширенный набор узловых неизвестных.

Так, например, конечный элемент Богнера-Фокса-Шмита имеет кроме классического набора узловых неизвестных (w, α, β – вертикальные перемещения и два угла поворота) имеет дополнительное узловое неизвестное (УН) $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$. Порядок сходимости его по перемещениям $t_u = 4$,

а по напряжениям (моментам $t_\sigma = 2$) и даже для более разреженных сеток он имеет лучшие показатели, чем элемент Клафа, имеющий три УН (w, α, β). Правда дополнительные УН, как правило, трудны в реализации. Так, например, элемент Богнера-Фокса-Шмита можно использовать в случае совпадения глобальной системы координат с местной, в противном случае

УН $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ порождает другие типы УН ($\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ и т.п.). Но даже в рамках

классического набора степеней свободы можно выбирать более точные конечные элементы, например, четырехугольные элементы плиты и балки-стенки предпочтительнее треугольных.

Это очень важно, так как при увеличении общего количества неизвестных L обусловленность матрицы K ухудшается, а это может привести к невозможности достижения заданной точности, хотя порядок аппроксимации для используемых типов элементов может обуславливать эту точность. Критерием обусловленности матрицы K может служить спектральное число обусловленности $a(K)$. Чем хуже обусловленность, тем больше $a(K)$. В работе [4.1] дается оценка $a(K)$, которая при равномерной сетке имеет вид:

$$a(K) = h^{-2m}, \quad (4.1)$$

где m – порядок системы уравнений, h – максимальный размер конечных элементов.

Из оценки (4.1) видно, что при конкретных расчетах больших задач лучше использовать элементы с большими h (т.е. надо избегать чрезмерно густых расчетных сеток), а заданную точность достигать за счет более высокого порядка аппроксимации. Следует отметить, что на обусловленность влияют и факторы, связанные с процессом интерполяции на элементе. Так, в работе [4.1] решение плоской задачи теории упругости при линейной интерполяции на треугольнике оценивается:

$$a(K) \cong \frac{1}{\sin^3 \alpha_{\min}} h^{-2}, \quad (4.2)$$

где $\alpha_{\min}$ – минимальный угол треугольника.

Из (4.2) видно, что при $\alpha_{\min} \rightarrow 0$ обусловленность неограниченно ухудшается. Для прямоугольной сетки аналогом $\alpha_{\min}$ является отношение меньшей стороны элемента к большей. Поэтому при назначении расчетной сетки предпочтение нужно отдавать равносторонним элементам.

Конечно, таких рекомендаций можно придерживаться при ручном создании конечно-элементной сетки. В большинстве случаев используется автоматическая триангуляция, которая реализована в каждом программном комплексе. Имеется много вариантов реализации автоматической триангуляции. Некоторые из них выложены в интернете (например, метод Делоне, www.ics.uci.edu/~cgpstein/gina/delaunay.html). На рис. 4.1 показан пример автоматической триангуляции со сгущением сетки, а на рис. 4.2 пример автоматической триангуляции произвольных пересечений поверхностей, полученные на основании методов реализованных в ПК ЛИРА. Практически все существующие методы автоматической триангуляции стремятся получить сетку с равносторонними конечными элементами, с равномерным сгущением в необходимых областях. Однако до сих пор удовлетворительных методов еще не создано.

Сопряжения различных типов конечных элементов.

При составлении компьютерной модели комбинированных систем (плита, подпертая ребрами, плоские или пространственные рамно-связевые системы, плита, опирающаяся на вертикальные стержни, балка-стенка, опирающаяся на плиту или наоборот и мн. др.) могут возникнуть различные трудности.

Стыковки рамного стержня с диафрагмой.

Здесь трудности обусловлены тем, что конечные элементы плоского напряженного состояния (балки-стенки) не имеют степени свободы соответствующей углу поворота относительно оси ортогональной плоскости диафрагмы. Попытки ввести эти степени свободы, например, в виде $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$, ни к чему не приводили, так как конечные элементы с такого

типа степенями свободы не имели сходимости. Поэтому узел А (рис. 4.3 а) без каких-либо дополнительных мер будет для стержня шарнирным. Для организации защемления рамного стержня в теле диафрагмы можно рекомендовать введение дополнительного стержня между узлами А и В. с одной стороны введение такого стержня будет вносить некоторые возмущения в локальной области диафрагмы в районе узла А, но с другой стороны в ряде случаев это будет моделировать конструктивное решение узла (заведение арматуры примыкающего стержня с целью её анкеровки).

Опираание плиты на точечную опору.

Такого типа проблема возникает в задаче опирания плиты на одиночную колонну при необходимости восприятия крутящих воздействий относительно вертикальной оси колонны. В этом случае можно рекомендовать введение абсолютно жестких вставок (рис. 4.3 б).

Вместо вставок kc , kd , kb , ka можно применить абсолютно жесткое тело $kabcd$, обеспечив кинематическую связь между его узлами*.

Такое решение с одной стороны, решает проблему учета «тела» колонны, т.е. «срезки» пика моментов, возникающего при моделировании опирания на колонну как на точечную опору. С другой стороны, обеспечивает восприятие колонной крутящих деформаций. В большинстве же случаев, когда имеется по крайней мере хотя бы две колонны, этого не требуется, т.к. в этом случае крутящий момент от деформаций в плоскости плиты будет восприниматься парами поперечных сил в колоннах, а крутящие моменты в этих случаях будут пренебрежимо малы и их наличие просто можно не учитывать (эффект пренебрежения моментами в законструированных жестких узлах ферм, когда в расчет были введены шарнирные узлы).

Аналогичный эффект наблюдается при моделировании диафрагм конечными элементами плоского напряженного состояния, которые не сопротивляются деформациям ортогональным плоскости элементов, хотя на самом деле плиты перекрытий, как правило, жестко связаны с диафрагмами и в последних возникают изгибающие моменты.

* В ПК ЛИРА такого типа жесткие тела вводятся в автоматизированном режиме. Вводимые жесткие тела могут моделировать «тело» колонны любой конфигурации (крестовое, уголковое, тавровое и др.)

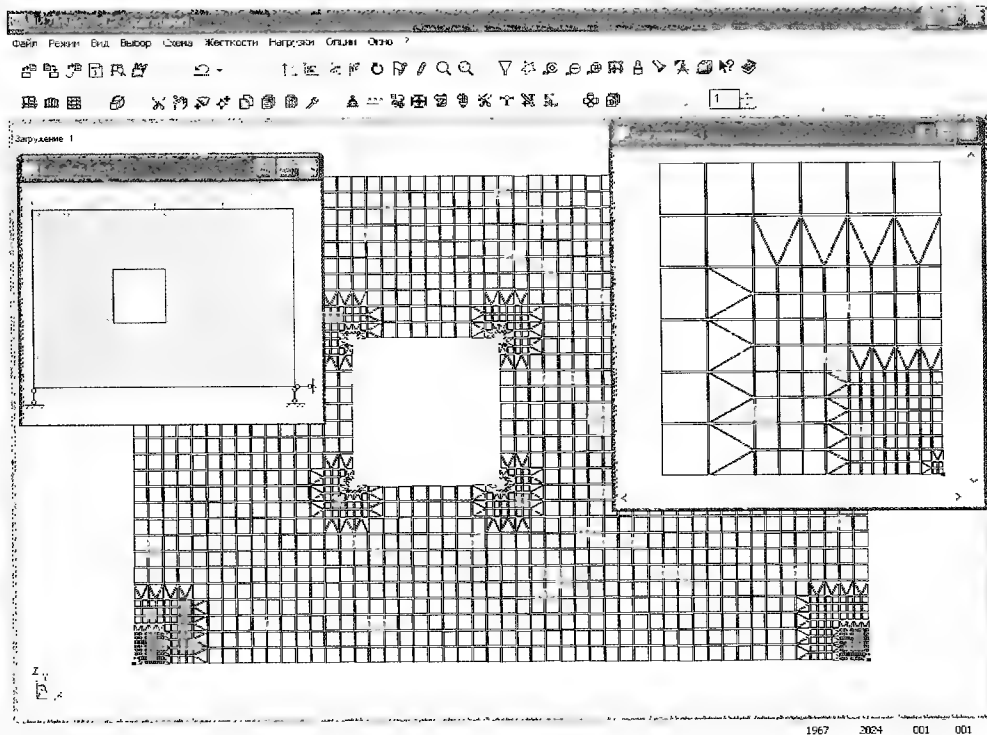


Рис. 4.1

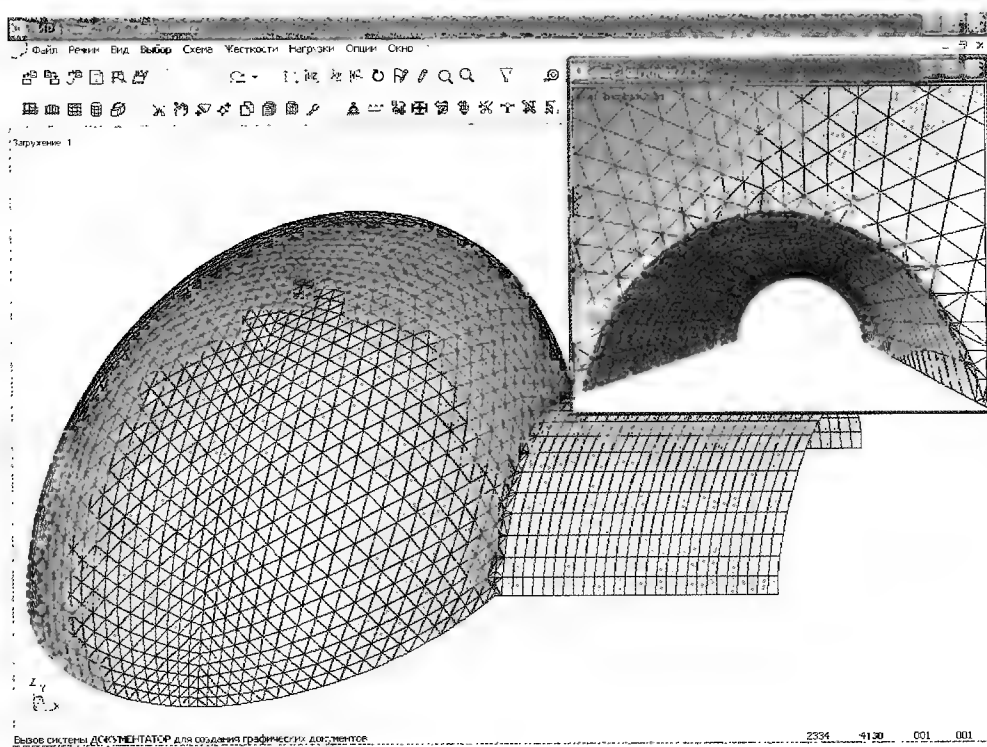
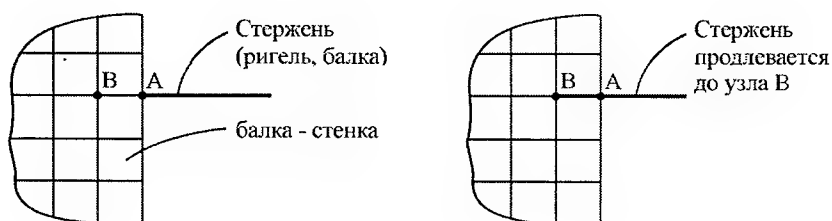
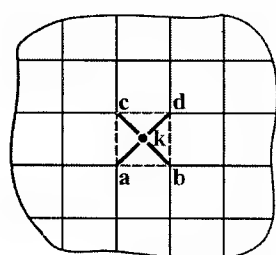


Рис. 4.2

а)



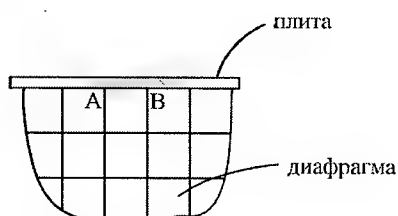
б)



$abcd$ - контур тела колонны

kc, kd, kb, ka - абсолютно жесткие вставки

в)



базисная "балочная" функция
КЭ плиты, соответствующая
вертикальному перемещению узла В

базисная "линейная" функция
КЭ диафрагмы (плоское
напряженное состояние), соответствующее
вертикальному перемещению узла В

Рис. 4.3

Опираение плиты на стену (диафрагму).

В этом случае необходимо иметь ввиду, что вдоль верхнего канта диафрагмы имеет место нестыковка базисных функций КЭ плиты (балочные функции) с базисными функциями КЭ плоского напряженного состояния, моделирующими работу диафрагмы (полилинейные функции – см. рис. 4.3 в). такие нестыковки не являются препятствием для адекватности расчетной схемы, так как при сгущении сетки параметры НДС плиты и диафрагмы будут приближаться к точному решению (конечно, при использовании «правильных» конечных элементов), а

совместность работы плиты и диафрагмы будут обеспечиваться одинаковыми линейными перемещениями в узлах стыковки.

Такого типа несоответствия могут достаточно часто встречаться при составлении конечно-элементных моделей (опирания диафрагм на фундаментную плиту, стыковка законтурных конечных элементов грунтового основания с конечными элементами, находящимися в пределах контура фундаментной плиты и т. др.). Вместе с тем, эти несоответствия не являются препятствием для построения конечно-элементных схем.

В заключение следует отметить, что большинство продвинутых программных комплексов в соответствующих инструктивных материалах уделяют большое внимание приемам построения конечно-элементных моделей. Так, инструктивные материалы программных комплексов семейства ЛИРА начиная с середины 60-х годов прошлого века, всегда содержали расширенный материал, где рассматривались многочисленные проблемы синтеза и анализа конечно-элементных моделей. Вот, например, содержание такого раздела (основные расчетные и теоретические положения) приведенного в [4.2]: краткое описание метода конечных элементов для линейных задач (общие положения, библиотека конечных элементов); решение системы канонических уравнений; расчет на динамические воздействия; суперэлементное моделирование; принципы определения расчетных сочетаний усилий, расчет на устойчивость и т.д.

4.2 Стратификация, фрагментация, суперэлементы

Какой бы подробной не была компьютерная модель, она всегда будет оставаться моделью, т.е. будет только моделировать различные свойства конструкции, причем, как правило, с различной степенью точности. Пожалуй, только плохая модель одинаково неудовлетворительно моделирует все свойства. Кроме того, над любителями чрезмерно подробных моделей всегда довлеет угроза вредного влияния зависимости (4.1), которая зачастую не может быть предотвращена ни проведением расчета с большой точностью (удержанием большого количества значащих цифр), ни изошренными быстродействующими алгоритмами решения систем линейных уравнений большого порядка.

Нельзя сбрасывать со счетов и трудность анализа большого количества информации. Поэтому, вряд ли можно считать целесообразным использование одной очень подробной компьютерной модели, на основании которой специалист надеется рассмотреть все нюансы работы конструкции. Вместе с тем, имеется целый набор приемов и методов (стратификация, фрагментация, суперэлементы, принципы вложенности), которые позволяют специалисту с меньшими затратами получить большее количество информации для осмысления работы конструкции.

Исследование конструкции на основе системы компьютерных моделей, каждая из которых рассматривает систему в целом и моделирует с

различным приближением то или иное свойство по своей логике близко к приемам стратификаций, применяемым в общей теории систем [4.3].

Так при расчете конструкций высотных зданий часто принимаются следующие стратификационные модели:

Страт 1. Исследования деформативности здания на горизонтальные воздействия.

Здесь применяется компьютерная модель характерная тем, что плита перекрытий моделирует только передачу горизонтальных усилий на вертикальные несущие элементы (колонны, диафрагмы), поэтому их разбивка на конечные элементы может быть достаточно крупной. Кроме того, диафрагмы виду того, что их высота значительно превышает поперечные размеры, могут быть заменены стержневыми элементами. Расчет на горизонтальные воздействия (ветер с учетом пульсации, сейсмика) всегда связан с проведением динамического расчета, с одной стороны, требующего больших ресурсов, с другой стороны, характерен большими приближениями в задании исходных данных. Поэтому использование упрощенной расчетной схемы вполне оправдано.

Страт 2. Исследования прочности и деформативности плиты перекрытия.

Как будет показано в разделе 4.11, расчет плиты перекрытия без учета ее работы в системе каркаса может привести к серьезным упущениям. Поэтому ее следует рассчитывать в общей схеме, однако влияние деформативности всего каркаса может быть учтено приближенно. В этом случае плита перекрытия должна иметь подробную густую конечно-элементную сетку, подробное моделирование узлов опирания этой плиты на колонны и диафрагмы, подробные схемы приложения вертикальной нагрузки. Учет влияния каркаса здесь может быть достаточно упрощен, например, по аналогии со стратом 1.

Страт 3. Исследования напряженно-деформированного состояния диафрагмы.

Здесь подобно страту 2 исследуемая диафрагма имеет более подробную конечно-элементную модель. Элементы остального каркаса моделируются по упрощенной схеме. Исследование работы плиты подпертой ребрами также может быть проведено на основе стратов:

Страт 1. Плита совместно с балочным ростверком

Страт 2. Плита совместно со стержневой системой подвешенной к узлам плиты на абсолютно жёстких вставках.

Страт 3 Плита, имеющая утолщенные конечные элементы в местах соответствующих расположению балок.

Каждый из этих стратов имеет свои преимущества и недостатки. Так, страт 1 удобен для дальнейшего конструирования, но требует предварительного ответа на вопрос о том, какую часть плиты следует включить в полку тавровой балки. Страт 2, по-видимому, более точно моделирует работу конструкции, но трудоёмок в синтезе и анализе. Страт 3

удобен при задании исходных данных, но требует более густой сетки, наличия конечных элементов толстых плит и др. Во всяком случае, если инженер обладает временем, терпением и желанием проникнуть в суть задачи, то исследование всех трёх стратов даст ему обильную и добротную пищу для размышлений (подробно об этой задаче в разделе 4.10).

Принцип фрагментации в отличие от стратификации основан на рассмотрении не всей схемы, а отдельного фрагмента. Взаимодействие фрагмента с остальной конструкцией заменяется действием силовых или деформационных факторов в местах примыкания отброшенной части. Конечно, значения этих факторов берутся из расчета всей конструкции, схема которой может быть достаточно (в пределах разумного) упрощенной, зато сам фрагмент может быть сколь угодно сложен, и иметь даже другой тип конечно-элементной модели. Например, общая схема может быть стержневой, а фрагмент исследуемого узла может быть создан на основе трехмерных конечных элементов.

Безусловно, реализация принципа фрагментации вручную очень трудоемка. Но если этот процесс автоматизирован, то его эффективность трудно переоценить. Так, в ПК МОНОМАХ, который ориентирован на расчет и проектирование конструкций высотных зданий, этот процесс автоматизирован. После расчета* всего каркаса здания совместно с грунтовым и свайным основанием на все виды воздействий, пользователь может выделить необходимый для исследования фрагмент (плита перекрытия, фундаментная плита, диафрагма) и автоматически получить силовые или деформационные воздействия на него от отброшенной части.

Как и выше рассмотренные приемы, принцип суперэлементов ориентирован на преодоление тлетворного влияния большой размерности задачи (4.1). Однако, он это делает не за счет применения набора упрощенных схем всей конструкции или набора вложенных расчетных схем (фрагментация), а за счет суперэлементной рекурсии (см. раздел 3.3), т.е. общая схема конструкции может быть очень подробной и включать несколько миллионов узловых неизвестных.

Суперэлементы могут представлять собой часть конструкции (панель, блок-комната, плита перекрытия, диафрагма, купол или цилиндрическая часть оболочки контеймента и т.п.) так и являться «вложенной» схемой. Например, при расчете оболочки контеймента на обжатие системой канатов** удобно использовать три типа суперэлементов: купол, цилиндрическая часть, система канатов (вложенная схема). Применение

* В ПК МОНОМАХ расчет всего здания реализован на основе различных расчетных схем-стратов. По упрощенной схеме проводится расчет при многовариантном проектировании, по уточненной – рассчитывается принятая схема.

** По ПК ЛИРА был выполнен ряд таких расчетов с использованием суперэлементов с учетом неравномерного натяжения и обрыва канатов, а также потери натяжения за счет трения в каналах.

суперэлементов полезно не только для преодоления размерности решаемой задачи, но и для удобства синтеза и анализа. Очень полезным может оказаться применение суперэлементов при решении нелинейных задач, в которых часть конструкции работает в линейно-упругой стадии и может быть объявлена суперэлементом. Так задача расчета здания на нелинейно-деформированном грунтовом основании может быть решена следующим образом: конструкции всего здания объявляются суперэлементом, а нелинейная часть принимается в качестве основной системы. Это позволяет значительно сократить время решения нелинейной задачи.

4.3 Моделирование конструктивных решений узлов – опорные закрепления, податливость соединений, шарниры, трение

Набор свойств вынесенных в заголовок, по сути, ориентирован на моделирование конструктивных решений узлов.

Опорные закрепления практически во всех программных комплексах задаются в виде величины соответствующего узлового перемещения. Если она равна нулю, то смоделирована абсолютно жесткая связь. Если перемещение задано (тоже своего рода опорная связь или точнее заданное граничное условие), то происходит расчет на заданное перемещение. По сути, введение абсолютно жесткой связи это тоже расчет на заданное нулевое перемещение. Например, плита опирается на колонны, которые, безусловно, не абсолютно жесткие и под нагрузкой деформируются, или клавишная модель упругого основания (Винклера) тоже, по сути, представляет распределенные упругие связи и т.д. и т.п. Для моделирования этого случая во всех известных авторах программных комплексах имеется специальный элемент «податливая связь». Как правило, это стержень с единичной длиной, жесткость которого соответствует моделируемой податливости.

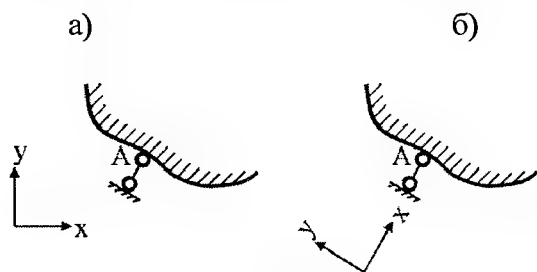


Рис. 4.4

При задании опорных закреплений трудности могут возникнуть в случае, если направление вводимой связи или заданного перемещения не совпадает с направлением глобальной системы координат (рис. 4.4). Определенным

выходом из создавшегося положения является введение в узел А нуль-элемента [4.4]. Простейшее представление нуль-элемента – это два последовательно расположенных стержня, имеющих одинаковую по величине и разную по знаку жесткости, сила, приложенная в промежуточном узле, определяет перемещение узла А. Однако, трудности в реализации (введение дополнительных узлов, неясность в назначении

жесткостей и др.) ставит под сомнение целесообразность этого приема (как и всякого неестественного решения).

Гораздо более эффективным является прием введения локальной системы координат в узле А (правда, для этого необходимо, чтобы программный комплекс имел эту возможность)*, одна из осей которой совпадает с направлением задаваемого перемещения.

Податливость соединения характерна для многих конструктивных решений узлов. Например, балка опирается на вертикальную опору через податливую прокладку с целью шумоглушения или снятия вибрационных воздействий. Если размеры соединительного элемента невелики или практически отсутствуют, то можно использовать специальный элемент «податливость узла» (рис. 4.5). Этот элемент не имеет геометрических размеров, поэтому координаты узлов А и В должны совпадать. Если податливость вводится только по одному направлению, то остальные УН узлов А и В необходимо объединить.

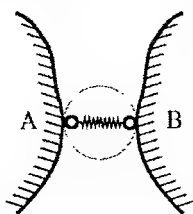


Рис. 4.5

Шарниры являются частным случаем податливости соединения, когда жесткость соединения по одному из направлений равна нулю, т.е. связь отсутствует. Моделирование шарниров можно осуществлять разными способами.

На рис. 4.6 а моделирование шарниров на двух концах ригеля осуществляется присвоением этому стержню нулевой изгибной жесткости.

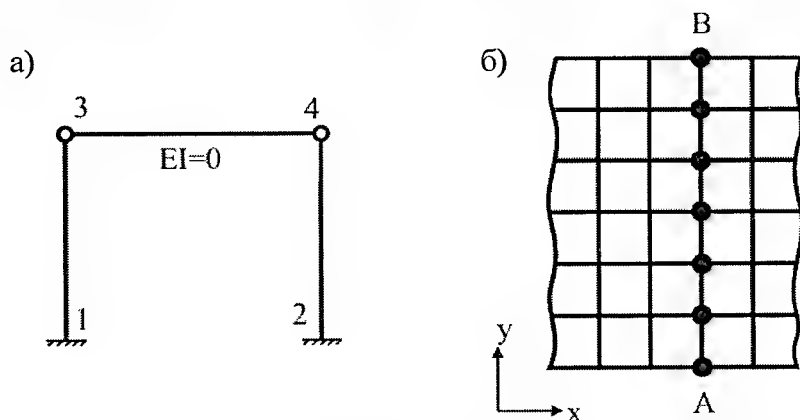


Рис. 4.6

Хотя прием довольно «грубый», он часто используется при составлении моделей ферм имеющих шарнирные узлы. Можно использовать аналогичный моделированию податливого соединения (рис. 4.5), т.е. производится двойная нумерация с последующим объединением узловых перемещений, кроме перемещений, соответствующих шарниру (снимаемой связи). Этот прием часто используется при организации цилиндрических

* В ПК ЛИРА реализован режим введения в узлы локальной системы координат

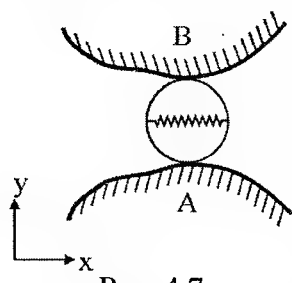
шарниров. На рис. 4.6 б приведен фрагмент конечно-элементной модели плиты с организацией цилиндрического шарнира по линии А–В. Узлы лежащие по линии А–В имеют двойную нумерацию и объединение узловых перемещений за исключением углов поворота относительно оси y .

Проскальзывание по сути тот же шарнир (затевать дискуссию по поводу терминологии здесь не имеет смысла), только типом снимаемой связи является не угол поворота, а линейные перемещения. Моделирование проскальзывания можно организовать так же, как и моделирование шарниров (двойная нумерация и объединение перемещений).

Но более естественным способом является использование конечных элементов*, у которых тип прикрепления узла конечного элемента к узлу расчетной схемы учитывается при составлении матрицы жесткости. В общем случае это податливость связи, как частный случай полное снятие связи – шарнир или проскальзывание.

В строительной механике стержневых систем давно известны матрицы жесткости стержней, имеющих на одном из концов шарниры. В главе 3 рассматривается реализация произвольного конечного элемента с произвольным типом присоединения.

Необходимость моделирования трения, возникающая в местах присоединения элементов, встречается в инженерной практике довольно



часто, например, моделирование потери усилий натяжения в канатах за счет трения в каналах. Для этого в ряде программных комплексов** имеется специальный элемент трения. Этот элемент (рис. 4.7) не имеет геометрических размеров (поэтому координаты узлов А и В, между которыми вводится этот элемент, совпадают) и обеспечивает совпадение горизонтальных перемещений узлов А и В если сдвигающая сила

между этими узлами $T < kN$ и проскальзывание этих узлов в случае $T > kN$ (T – сдвигающая сила, N – нормальная сила, k – коэффициент трения). Реализация этих зависимостей, конечно, возможна только в рамках нелинейного расчета.

4.4 Абсолютно жесткие вставки (тела). Объединение перемещений

Введение абсолютно жестких вставок (тел) имеет целью задание кинематической связи перемещений. Такая связь может задаваться без явного осознания наличия абсолютно жесткого тела, например,

* В ПК ЛИРА реализованы различные типы присоединения узлов КЭ к узлам расчетной схемы, как для стержней, так и для пластинчатых КЭ.

** В ПК ЛИРА реализованы специальные элементы трения.

объединение перемещений, хотя кинематическая связь перемещений всегда обусловлена наличием абсолютно жесткого тела. С одной стороны такая процедура несколько противоестественна, так как в природе нет ничего абсолютного. Это может служить некоторым объяснением того, что специалисты часто вместо абсолютно жесткого тела вводят элемент конечной (очень большой) жесткости. Хотя для этого у них есть более серьезные аргументы – желание получить усилия в этом элементе, более легкая реализация, придание физического смысла построенной модели. Но здесь имеется серьезный контраргумент: наличие элементов большой жесткости существенно ухудшает обусловленность системы уравнений (ведь в выражении 4.2 для обусловленности системы уравнений, по сути, влияние сильной неравносторонности конечных элементов обусловлено большим разбросом величин в соответствующих матрицах жесткости).

На рис. 4.8 представлена расчетная схема колонны, характерной для промышленного здания.

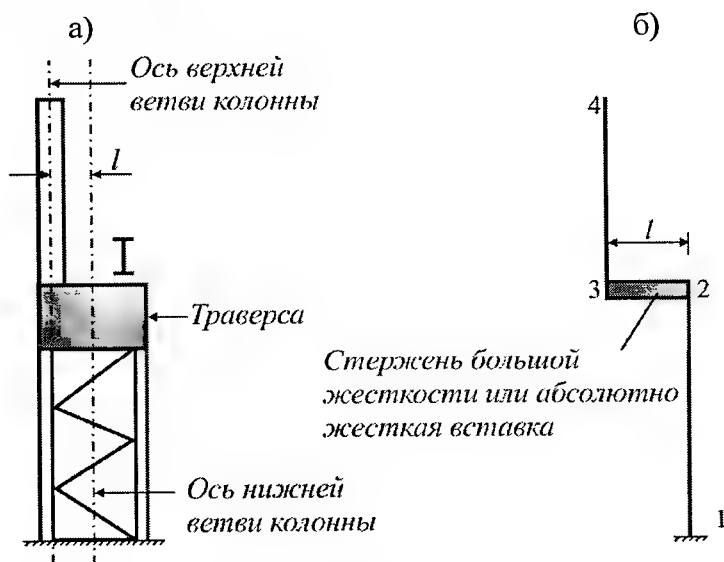


Рис. 4.8

Стержень 1–2 моделирует нижнюю (подкрановую) ветвь колонны поставного сечения, 3–4 – верхнюю подкрановую ветвь колонны. Оси этих ветвей не совпадают. В натуре этот узел решают при помощи мощной траверсы. В расчетной схеме траверсу моделируют либо стержнем 2–3 большой жесткости, либо абсолютно жесткой вставкой 2–3. Абсолютно жесткая вставка может быть отнесена либо к одному из стержней 1–2 или 3–4, либо введена как самостоятельная абсолютно жесткое тело 2–3. программные комплексы должны предоставлять пользователю право выбора. Все «за» и «против» обсуждались выше.

Как правило, забота о хорошей обусловленности матрицы оказывается более весомой и пользователи чаще пользуются приемом введения абсолютно жестких тел. И хотя этот прием несколько

противоестественен (см. выше), но его плодотворность в ряде случаев трудно переоценить. Чего стоит, например, гипотеза плоских сечений (прямых нормалей). Ведь, по сути, выражение $u_x(z) = \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot z$ есть не что иное, как кинематическая связь между горизонтальными перемещениями u_x в сечении стержня с вертикальными перемещениями w .

С физической точки зрения это означает наличие в каждом сечении стержня абсолютно жесткой траверсы, плоскость которой ортогональна оси стержня. А для тонкой плиты гипотеза прямых нормалей означает введение в каждой точке плиты абсолютно жесткого не имеющего размеров сечения стержня, ортогонального плоскости плиты.

Можно привести много примеров и рекомендаций для использования в компьютерных моделях абсолютно жестких тел (вставок, режима объединения перемещений). Например, желание пользователя смоделировать большую жесткость ригеля 3–4 (рис. 4.6), которое может быть обусловлено стремлением учесть наличие диска перекрытия, может быть реализовано объединением горизонтальных перемещений узлов 3–4. Если возникает необходимость определения нормальной силы в ригеле 3–4, то это можно сделать из статических условий (разность перерезывающих сил в стойках 1–3 и 2–4). Этот прием безусловно можно обобщить на случай абсолютно жесткого тела произвольной формы.

Введение абсолютно жесткого тела очень эффективно при необходимости учета «тела» колонны при расчете безригельного перекрытия. Реализация этого приема рассмотрена в разделе 4.1 (рис. 4.3 в). Учет «тела» колонны при расчете балочного ростверка может быть реализован применением конечных элементов балочных стержней, имеющих в своем составе абсолютно жесткие вставки (рис. 4.9).

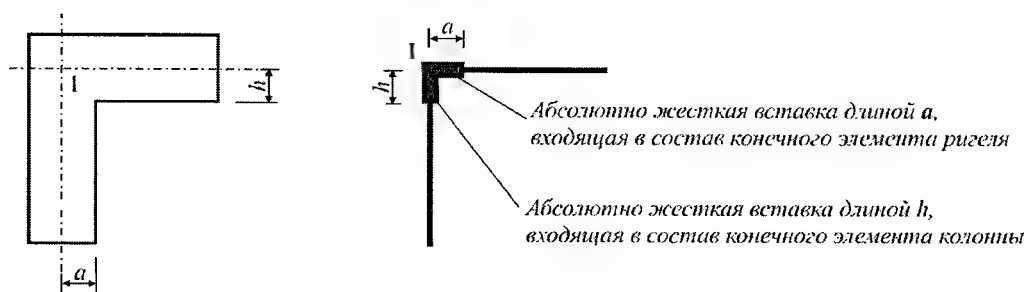


Рис. 4.9

В разделе 4.10 при обсуждении компьютерных моделей плит подпертых ребрами в одном из наиболее удачных вариантов будет использован прием введения абсолютно жестких вставок, на которых конечные элементы балок «подвешиваются» к узлам конечно-элементной сетки плиты.

Введение абсолютно жестких тел, особенно если это выполняется на уровне объединения перемещений, таит в себе много подводных камней.

Дело в том, что введение абсолютно жесткого тела – это, по сути, введение внутренних дополнительных связей, правомерность применения которых нельзя проверить наиболее действенным приемом проверки глобального равновесия, когда сумма всей внешней нагрузки должна быть равна сумме реакций в опорных связях.

Вот несколько примеров определенных несоответствий, которое может обусловить неосторожное обращение с режимом объединения перемещений.

На рис. 4.10 условно показана конечно-элементная сетка плиты перекрытия. Желание смоделировать абсолютно жесткий диск при расчете на горизонтальные воздействия может побудить пользователя объединить все линейные перемещения по направлению осей x и y . Это приведет к запрещению поворота перекрытия вокруг оси z , вызванного закручиванием здания при несовпадении равнодействующей горизонтальной нагрузки с центром жесткостей диафрагм. Если уж и объединять перемещения, то это

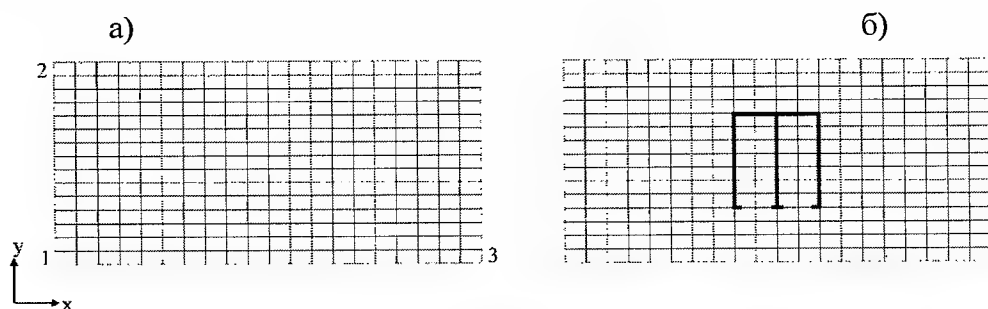


Рис. 4.10

необходимо выполнять отдельно для каждой группы узлов, лежащих на линиях параллельных осям x и y .

На рис. 4.10 б приведена схема опирания конструкций лифтовой шахты на фундаментную плиту. Желание учесть большую жесткость диафрагм может побудить пользователя к объединению вертикальных перемещений в узлах лежащих на линиях примыкания стен шахты к фундаментной плите. Это приведет к грубым ошибкам. Так при расчете фундаментной плиты не будет учтена деформация поворота лифтовой шахты от горизонтальных нагрузок, а при расчете конструкций лифтовой шахты (и, что еще хуже, для всего здания) будет введено жесткое защемление конструкций лифтовой шахты в фундаментной плите, в то время как это защемление имеет податливость и его влияние очень существенно на НДС как фундаментной плиты, так и конструкций всего здания.

Очень показателен пример неправомерного введение объединения перемещений, ошибка от которого была обнаружена после возведения объекта и вызвала необходимость его усиления.

Рассчитывалась плита достаточно большого пролета подпертая сложной системой ребер, имеющих переменное сечение по высоте и ширине.

Сущность этой ошибки рассмотрим на плоском фрагменте конструкции (см. рис. 4.11), представляющем собой конструкцию опирания

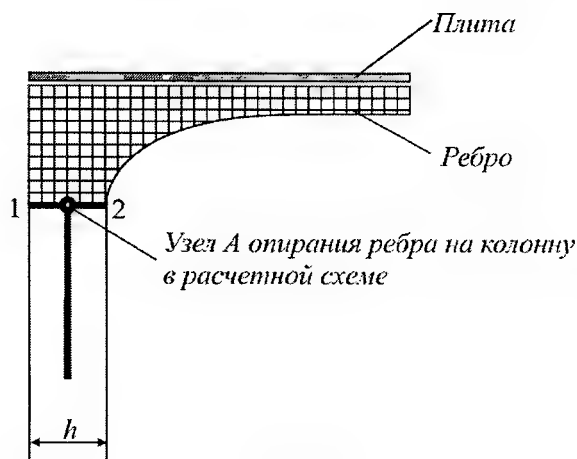


Рис. 4.11

ребра на колонну. Ребра моделировались конечными элементами балки-стенки, имеющими различную толщину. Ширина колонны h совпадала с шириной опорной пяты ребра. Колонна была смоделирована одним стержнем, поэтому ребро опиралось на колонну в одной точке А. Желание учесть «тело» колонны побудило пользователя объединить вертикальные перемещения узлов лежащих на линии 1–2.

Это вызвало образование жесткого защемления ребра на опоре и значительное снижение пролетного момента в ребре и плите, а затем и по всей цепочке ошибок (заниженное армирование и т.д.), что в конце концов вызвало необходимость усиления уже возведенной конструкции.

Расследование этой ситуации было связано с привлечением всего арсенала приемов обнаружения ошибок. Некоторые из этих приемов будут рассмотрены в разделе 4.15.

4.5 Применение различных систем координат

Современные программные комплексы предоставляют пользователю возможность применения набора различных систем координат. Можно выделить три основных вида систем координат:

- *Глобальная* – относительно которой может описываться весь набор факторов характеризующих компьютерную модель: узловые перемещения, связи, местные и узловые нагрузки, напряжения и т.д. глобальная система координат может быть декартовой, цилиндрической, сферической и др.
- *Местная* система координат является прерогативой конечных элементов. Относительно нее может задаваться нагрузка, действующая по области конечного элемента, вычисляются напряжения.

- *Локальная система координат* является прерогативой узлов. Относительно нее могут задаваться направления перемещений, узловые нагрузки, связи.

В разделе 3.4 эти виды систем координат рассматривались с точки зрения реализации, здесь их краткое рассмотрение проводится с точки зрения возможностей синтеза и анализа компьютерных моделей. Вот несколько примеров применения различных видов систем координат и их возможных комбинаций. Примеры носят рекомендательный характер и, конечно, далеко не исчерпывают всего многообразия различных приемов.

Применение локальной системы координат для задания объединения перемещений, связей и узловых нагрузок по направлениям, не совпадающим с глобальной системой координат. В этих случаях в соответствующие узлы вводятся локальная система координат и дальнейшая процедура задания того или иного параметра производится обычным способом. Например, если необходимо объединить линейное перемещение узлов А и В по направлению линии А–В (рис. 4.12), то в

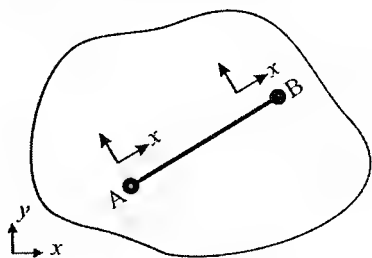


Рис. 4.12

узлы А и В вводится локальная система координат, одна из осей которых (например x) совпадает с линией А–В и производится объединение перемещений по направлению оси x .

Применение местной системы координат для задания различных видов нагрузок. Очень часто встречаются нагрузки, действующие ортогонально поверхности как угодно расположенного конечного элемента. К таким видам нагрузок относятся гидростатическое давление, ветровая нагрузка, давление грунта и мн. др. В этом случае нагрузки на конечный элемент удобно задавать в местной системе координат, так как эта система координат, как правило, предполагает направление одной из осей ортогонально направленной к плоскости КЭ.

Применение глобальной системы координат для задания нагрузки от собственного веса. Как правило, в программных комплексах нагрузка от собственного веса определяется автоматически от конструктивных элементов (плит, колонн, балок и др.). Однако нагрузку от собственного веса несущих конструкций (перегородки, конструкции полов, утеплители стен и т.п.) необходимо задавать. В этом случае вне зависимости от положения элемента нагрузка ориентируется относительно одной из осей глобальной системы координат, которая, как правило, направлена вертикально.

Безусловно, программные комплексы должны предоставлять пользователю кроме перечисленных выше типов систем координат и другие возможности ориентации тех или иных параметров. Например, при подборе арматуры в различных областях конструкций пользователь может

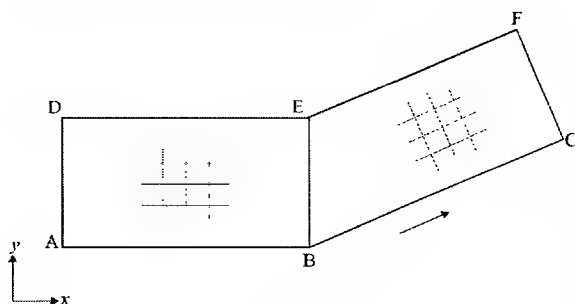


Рис. 4.13

указать направление раскладки ортогонально расположенных стержней. Так для плиты (рис. 4.13) для участка BCEF можно указать направление BC в соответствии, с которым будет подобрана арматура, хотя вся система может быть рассчитана относительно одной глобальной системы координат.

Достаточно плодотворной является возможность использования «полиглобальных» систем координат, т.е. когда компьютерная модель для одной части конструкции описывается в одной субглобальной системе, а для другой части – в иной системе. Например, для ортогонального каркаса имеющего покрытие в виде цилиндрической оболочки конструкции каркаса могут быть описаны в декартовой системе координат, а конструкции цилиндрической оболочки – в цилиндрической системе координат.

4.6 Рассуждения на тему, почему узлы ферм рассчитываются шарнирными, а конструируются жесткими

В докомпьютерный период расчет ферм проводился по шарнирно-стержневым схемам. Для статически определимых шарнирно-стержневых схем были разработаны многочисленные приемы: метод вырезания узлов, моментных точек, диаграмм Кремона и мн. др. Вместе с тем, узлы ферм проектировались жесткими. Это с одной стороны объяснялось невозможностью провести расчет ручным способом многократно статически неопределимой системы (что обуславливается жесткими узлами), с другой стороны осуществления в натуре шарниров чрезвычайно сложно.

В настоящее время без особого труда можно учесть жесткость узлов. По сути, пользователю для этого надо сделать только одно указание: система рамная или шарнирная. При этом можно учесть такие факторы как внеузловое приложение нагрузки, нарушение центровки элементов в узлах, наличие элементов с большой изгибной жесткостью (например, верхний пояс для восприятия внеузловой нагрузки выполнен из двутавра, работающего по неразрезной схеме) и др. А при расчете с учетом геометрической нелинейности по деформированной схеме можно учесть такие факторы как увеличение моментов за счет продольного изгиба, увеличение жесткости растянутых и уменьшение сжатых элементов, т.е. перераспределение усилий, которое может быть значительным.

При расчете небольших систем (несколько сот неизвестных), как правило, никаких трудностей не возникает. Для больших систем здесь

необходимо считаться, что большой разброс в величинах изгибных (EI) и продольных (EF) жесткостей ухудшается обусловленность матрицы (сказывается пагубное влияние ограничения 4.2) и это может привести к большим погрешностям. В этом случае необходимо прибегнуть к различным ухищрениям, но самым универсальным и действенным является метод суперэлементов.

Борясь с плохой обусловленностью матрицы уравнений, инженер может принять решение о расчете шарнирной схемы. Определенным критерием такой замены может служить сравнение перемещений рамной и шарнирной схем, и если отличия незначительны (в пределах принятой точности расчета), то это означает, что изгибные жесткости вносят незначительный вклад в жесткость конструкции и такая замена правомерна.

Можно привести и другие типы конструкций, для которых характерны такого типа проблемы. Так, для балочного ростверка очень часто пренебрегают крутильными жесткостями, так как в жесткость балочного ростверка основной вклад вносят изгибные жесткости. Особенно это характерно для стальных балок прокатного профиля. Нормы по стальным конструкциям молчаливо принимают этот подход, что выражается в отсутствии соответствующих проверок.

Подобные рассуждения можно перенести на расчет диафрагм каркасных зданий, обеспечивающих их жесткость на горизонтальные воздействия. В этом случае без особых погрешностей можно применить конечные элементы плоского напряженного состояния, т.е. рассматривать диафрагму как балку-стенку, пренебрегая изгибной группой усилий, действующей ортогонально плоскости диафрагмы.

В приводимых выше рассуждениях есть еще один аспект: подбирая сечение элемента только на одну группу усилий (в ферменном элементе это продольное усилие, в элементе балочного ростверка – изгибающий момент, в диафрагме – мембранные усилия) и пренебрегая другой группой усилий (в ферменном элементе это изгибающий момент, в элементе балочного ростверка – крутящий момент, в диафрагме – изгибная группа усилий), инженер может допустить перенапряжение в сечении элемента. Правомерен ли такой подход? Ведь, например, уголкового сечения ферменного элемента плохо приспособлены к восприятию изгибающего момента и даже небольшой момент может вызвать значительное напряжение. Ответ следующий: такой подход в большинстве случаев правомерен. Так как за счет нелинейных деформаций конструкция приспособляется и воспринимает внешнее воздействие наиболее целесообразным образом.

4.7 Вантовые конструкции, мембраны, предварительное натяжение

Вантовые системы и мембраны являются очень распространенным видом конструкций. Это и вантовые системы покрытий больших пролетов, это и вантовые фермы, конструкции мачт на оттяжках, антенны в виде вантовых систем, вантовые мосты и мн. др. Очень распространены конструкции больших пролетов в виде мембран или тентов.

С точки зрения построения компьютерных моделей их объединяет общее требование проводить расчет в геометрически нелинейной постановке. Причем в отличие от таких геометрически нелинейных систем как гибкие фермы, плиты и т.п., которые изначально являются геометрически неизменяемыми, вантовые системы и мембраны изначально геометрически изменяемы и могут воспринять нагрузку, существенно изменив свою первоначальную форму, приняв равновесную форму, соответствующую действующей нагрузке. В этом случае появляется специфический начальный этап расчета – поиск равновесной формы. Этот этап, как правило, усложняется необходимостью учета предварительного натяжения, которое применяется для придания системе большей жесткости и существенно влияет на начальную форму конструкции и последующие равновесные формы. В докомпьютерный период исследования вантовых систем в основном сводилось к изучению отдельной нити [4.5, 4.6, 4.9], а изучение вантовых систем правдами и неправдами сводилось к изучению отдельной нити [4.7, 4.8, 4.9 и мн. др.] или использовались приемы характерные для конкретной задачи (абсолютно жесткий контур, равномерное натяжение, простая форма контура, например, круглый и т.д. и т.п.). К сожалению, даже современные работы иногда грешат длинными рассуждениями по этой проблеме с устаревших позиций. МКЭ в постановке рассмотренной в разделе 2 и приложении 1 позволяет осуществлять расчет всех многообразных конструкций такого типа с единых позиций.

Отдельная нить. Как указывалось выше, этот конструктивный

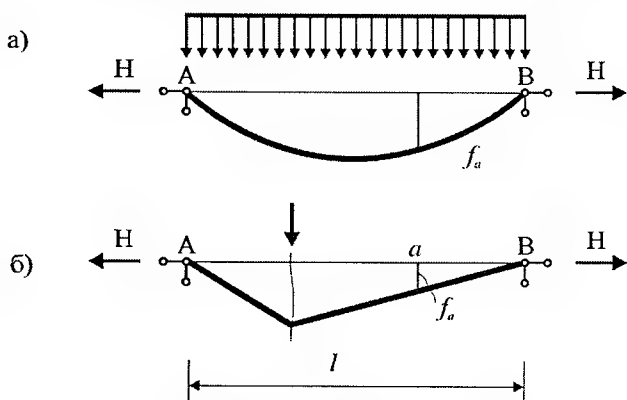


Рис. 4.14

элемент был достаточно хорошо изучен в докомпьютерный период. Это объяснялось тем, что равновесная форма под нагрузку ортогональную линии соединяющей опорные точки нити может быть найдена достаточно просто (рис. 4.14). Как правило ее форма соответствует

эпюре изгибающих моментов в однопролетной шарнирно-опертой балке, а прогиб в любой точке A равен $f_a = M_a / H$, где M_a – момент в точке A , H – величина распора. Это соотношение лежит в основе всех рассуждений, связанных с исследованием работы отдельной нити. Однако, учет таких факторов как произвольная нагрузка неортогональная линии $A - B$, собственный вес, наклон нити, растяжимость нити, податливость опор, предварительное натяжение и мн. др. значительно затрудняет описание НДС нити в аналитическом виде.

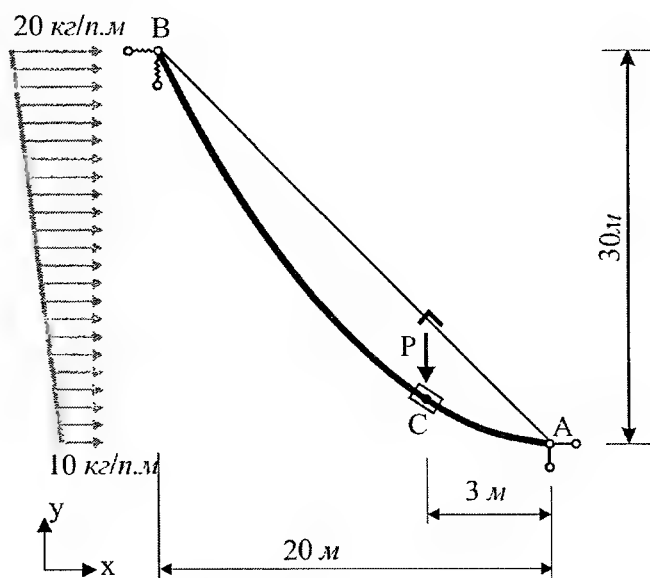


Рис. 4.15

В то же время использование единого подхода с позиций МКЭ позволяет учесть эти факторы и получить решение задачи в численном виде. Для этого необходимо расчленить нить на определенное количество конечных элементов типа «геометрически нелинейный сжато-растянутый стержень» (здесь работают общие законы МКЭ, по нанесению конечно-элементной сетки), смоделировать предварительное натяжение*, податливость опор, нагрузку и выполнить расчет. На рис. 4.15 приведен пример численного расчета нити (расчет проведен по ПК ЛИРА), при следующих факторах:

$L=36,2$ м – начальная длина нити; сосредоточенная сила в узле С $P_C=10$ т; величина предварительного натяжения – $31,5$ т; податливость горизонтальной и вертикальной опоры в узле В – 5000 т/м; материал нити – трос диаметром 30 мм (стандарт DIN 3054).

* В ПК ЛИРА для этого реализован специальный элемент «форкопф».

Расчет проводился на предварительное натяжение, собственный вес троса, сосредоточенную силу P_C и горизонтальную нагрузку от ветра $q_A=10 \text{ кг/п.м.}$, $q_B=20 \text{ кг/п.м.}$

В процессе расчета нить была расчленена на 50 конечных элементов типа «геометрически нелинейный сжато-растянутый стержень». В результате расчета получены все основные характеристики НДС, в том числе:

перемещения узла $B - u_x=0,5 \text{ см}, u_y=-0,7 \text{ см};$

перемещения узла $C - u_x=-29,2 \text{ см}, u_y=-23,7 \text{ см};$

усилия в нити $H_{AC}=34,41 \text{ т}, H_{CA}=34,46 \text{ т}, H_{CB}=42,51 \text{ т}, H_{BC}=42,88 \text{ т}.$

Конечно, решить такую задачу в аналитическом виде не представляется возможным.

Отдельная ванта. В некоторых программных комплексах ванты представляется как отдельный специальный элемент «ванта», для которого задается сечение троса, расстояния между концами, начальные длины

(заготовка) и предварительное натяжение.

Однако, возможность учета таких факторов как местная произвольная нагрузка на ванту (например, вес полиспаста), возможность изменения натяжения во время монтажа и эксплуатации и т.п. затруднена. В этом случае подход рассматриваемый выше для отдельной нити (рис. 4.15) как правило может решить эти проблемы. Так, при расчете мачты с вантами каждая ванта может быть смоделирована по схеме представленной на

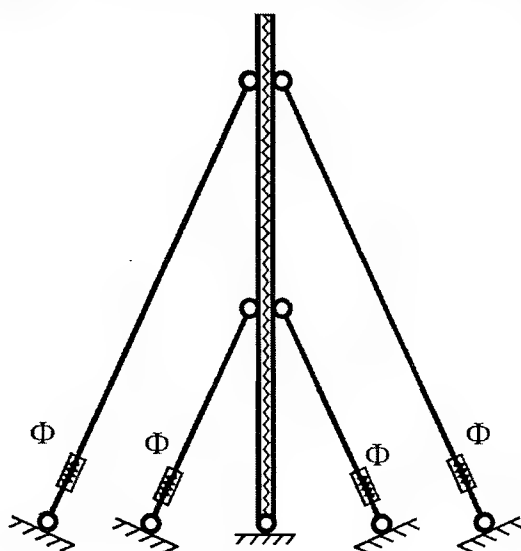


Рис. 4.16

рис. 4.15: каждая ванта расчленяется на 50 – 100 элементов типа «геометрически нелинейный сжато-растянутый стержень»; задается начальная длина (заготовка); в соответствующем месте устанавливается специальный конечный элемент «фаркопф», моделирующий натяжное устройство (на рис. 4.16 он обозначен символом «Φ»); сама мачта также может быть смоделирована набором специальных конечных

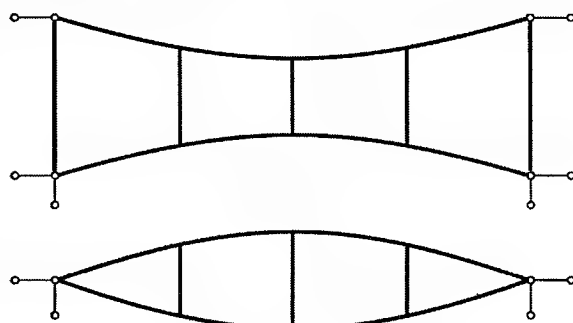


Рис. 4.17

элементов типа «сжато-растянутый стержень», при этом могут быть учтены эффекты потери устойчивости. Сам расчет может быть организован следующим образом: на первом этапе моделируется процесс натяжения, который производится поэтапно для достижения заданного натяжения в каждой ванте; нагрузкой на этом этапе является собственный вес вант, собственный вес натяжных устройств и другие монтажные нагрузки; затем производится расчет на эксплуатационные воздействия.

Вантовые фермы. Эти конструкции (рис. 4.17) по сравнению с отдельной нитью или вантой, безусловно, в смысле расчета являются более сложными. Вместе с тем при определенных допущениях (пояса фермы пологи, стойки абсолютно жесткие и всегда вертикальные, нагрузка только вертикальная узловая и приложена в узлах фермы) удастся получить решение в аналитическом виде [4.10].

Единый подход МКЭ дает возможность построить и рассчитывать компьютерные модели вантовых ферм произвольного вида. Для этого как для поясов, так и для стоек применяется конечный элемент типа «геометрически нелинейный сжато-растянутый стержень», а для моделирования предварительного натяжения – специальный элемент «фаркопф».

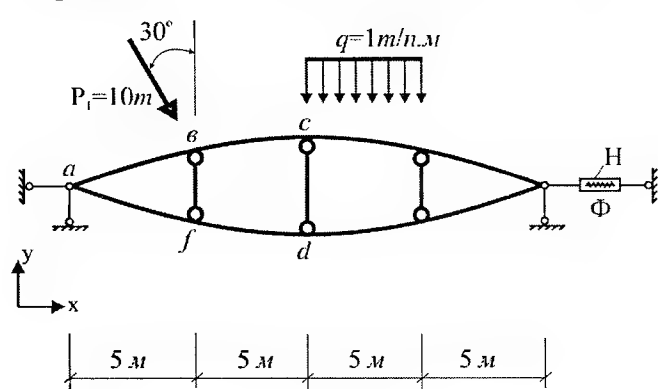


Рис. 4.18

На рис. 4.18 приведена схема вантовой фермы со следующими параметрами: пролет фермы – 20 м; высота в центре – 2 м; сечение стоек – труба 60×6; сечение поясов – трос Ø 30 мм (стандарт DIN 3054). Расчет был выполнен по ПК ЛИРА.

Каждая панель расчленилась на 10 конечных элементов. В табл. 4.2 приведены некоторые результаты расчета – усилия в панелях АВ и ВС и перемещения узлов В и С при различных величинах предварительного натяжения.

Табл. 4.2

Параметры НДС	Величина предварительного натяжения в <i>m</i>		
	30	40	50
Усилие в элементе АВ в т	9,4	13,9	18,6
Усилие в элементе ВС в т	4,4	8,9	13,6
Усилие в элементе FD в т	47,7	49,8	52,1
Вертикальное перемещение узла С	-36,5	-34,5	-33,0
Горизонтальное перемещение узла С	17,2	24,3	31,3
Горизонтальное перемещение узла D	1,1	9,9	18,2

Анализируя результаты, приведенные в табл. 4.1, можно проследить известный эффект, что с увеличением предварительного натяжения конструкция ужесточается. Так, при $H=30\text{ м}$ вертикальное перемещение центрального узла С равно 36,5 см, а при $H=50\text{ м}$ – 33,0 см.

Вантовые системы часто используются для конструкций антенны и большепролетных покрытий. На рис. 4.19 приведены наиболее характерные схемы вантовых систем. Как правило, они образуют поверхность гиперболического параболоида (гипара). Тросы, имеющие выпуклость вниз, являются несущими, и им придается, как правило, большая кривизна.

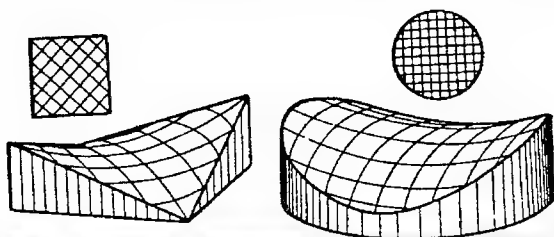


Рис. 4.19

Тросы, имеющие выпуклость вверх являются натягающими тросами и, как правило, имеют меньшую кривизну. Такая конструкция позволяет предварительно натянуть вантовую сеть и придать ей определенную жесткость. При расчете вантовых сетей обязательно нужно учитывать податливость контура, так как этот фактор существенно влияет на перераспределение усилий в элементах вантовой сети. При создании компьютерных моделей вантовых систем используются конечные элементы типа: геометрически нелинейный сжато-растянутый стержень для моделирования собственно вант; физически нелинейный стержень, воспринимающий все виды усилий для моделирования бортовых элементов; специальный элемент «фаркопф», моделирующий предварительное натяжение. Расчету вантовых сетей на эксплуатационные нагрузки обязательно должны предшествовать этап компьютерного моделирования формообразования на основе варьирования предварительным натяжением вант. Такое моделирование представляется достаточно сложным, так как натяжение одной из вант существенно перераспределяет натяжение остальных вант, что обусловлено конструктивной взаимосвязью вант и податливостью контура. Специальный элемент «фаркопф» позволяет осуществить такое моделирование.

Висячие оболочки, мембраны, тенты. Вантовые системы обычно являются основой для дальнейшего возведения висячих оболочек. Достаточно широко распространены конструкции, образованные навешиванием на вантовую сеть железобетонных плит с последующим омоноличиванием. На эксплуатационные нагрузки уже работает висячая железобетонная оболочка. Для расчета такой конструкции необходимо наличие конечных элементов оболочки учитывающих геометрически и физически нелинейные факторы одновременно*. Стальные мембраны

* В библиотеке конечных элементов ПК ЛИРА имеются элементы такого типа.

больших пролетов, как правило, создаются на основе системы стальных полос (постели) навешиваемой на контур. С позиций компьютерного моделирования процесс формообразования мембраны на основе системы полос аналогичен моделированию формообразования вантовых систем. Для расчета мембраны на эксплуатационные нагрузки применяется геометрически нелинейный элемент мембраны, который отличается от конечных элементов висячей оболочки тем, что воспринимает только мембранную группу усилий.

С точки зрения расчета тентовые покрытия аналогичны мембранам. Если для тента используется тканевый материал, то конечные элементы тентовой конструкции должны учитывать ортотропию материала (жесткость по направлению «основы» значительно превышает жесткость по направлению «утка») и отсутствие сдвиговых жесткостей.

Характерной особенностью рассматриваемых в этом разделе конструкций является существенная нелинейность их работы. Это обуславливает невозможность расчета отдельно на каждое нагружение с последующим объединением усилий в расчетные сочетания усилий. В этом случае необходим расчет на отдельное сочетание нагружений (например, собственный вес + снег на половине конструкции; собственный вес + снег на всей конструкции + ветер и т.д.), при этом расчет на сочетания эксплуатационных нагружений должен начинаться не с «нулевого состояния», когда напряжения, деформации и усилия отсутствуют, а от состояния, которое образовалось в результате формообразования вантовой сети или «постели», когда напряжение и деформации в основном обусловленные предварительным натяжением могут достигать значительных величин. Если программный комплекс не предусматривает возможность начала расчета с «не нулевого» состояния, то каждый раз расчет на новое сочетание эксплуатационных нагружений должен предварять расчет на стадии формообразования.

4.8 Контактные задачи.

Наиболее распространенным типом контактных задач в строительном проектировании являются конструкции на подрабатываемых территориях, когда грунтовое основание в процессе эксплуатации может исправляться, нарушая контакт между подошвой фундаментной конструкции и грунтом (рис. 4.20).

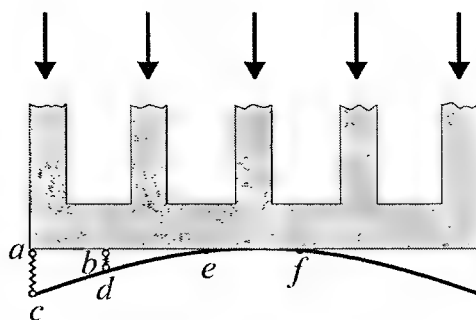


Рис. 4.20

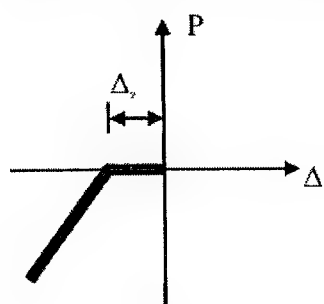


Рис. 4.21

Наличие зазоров обуславливает нелинейную зависимость между усилиями и перемещениями и часто практикуется как конструктивная нелинейность. Компьютерная модель в этом случае должна использовать специальные элементы «односторонний элемент с зазором». Зависимость между усилиями и перемещениями для такого элемента имеет вид представленный на рис. 4.21.

Здесь Δ_z – величина зазора для каждого узла. Так, элемент AC будет иметь зазор $\Delta_z = l_{AC}$, а элемент BD соответственно $\Delta_z = l_{BD}$. При компьютерном моделировании процесса нагружения такой конструкции (как правило, используются шаговые методы) первоначальная зона контакта EF расширяется за счет обмятия грунтового основания в этой зоне (могут использоваться конечные элементы грунтового основания, учитывающие физическую нелинейность грунта, что естественно укладывается в процесс компьютерного моделирования процесса нагружения) и по мере «выбора» зазоров в работу будут включаться остальные элементы грунтового основания.

Другой характерный пример приведен на рис. 4.22.

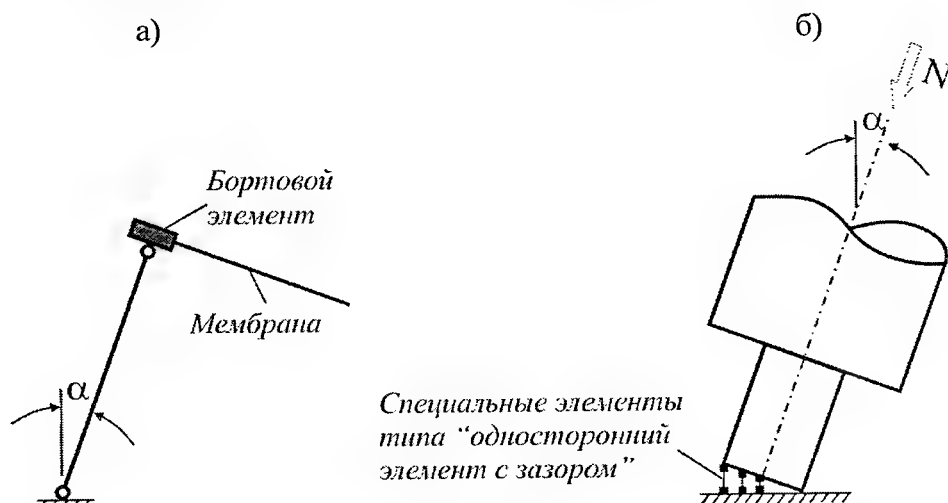


Рис. 4.22

При организации шарнирного опирания колонны (такое конструктивное решение часто встречается при проектировании большепролетных покрытий, когда надо обеспечить возможность больших перемещений бортового элемента – рис. 4.22 а). необходимо учитывать возможность наклона колонны и частичной потери контакта между основанием оголовка колонны и основанием подколонника (рис. 4.22 б). компьютерная модель такой конструкции также может быть основана на использовании специального элемента «односторонний элемент с

зазором». На рис. 4.23 приведено графическое отображение результатов расчета реальной конструкции.

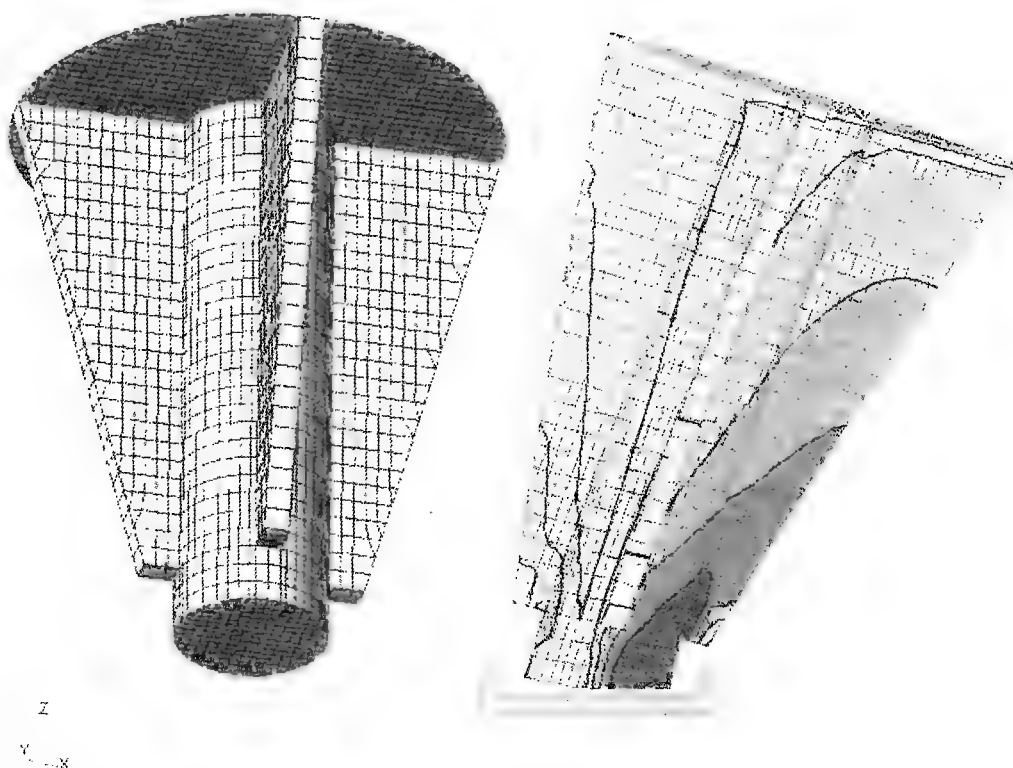


Рис. 4.23

Нижняя часть колонны и подколонник (материал конструкции – сталь) была смоделирована трехмерными физически нелинейными конечными элементами. Наклон колонны равен 6° . Между основанием оголовка колонны и подколонником были введены специальные элементы типа «односторонний элемент с зазором», у которых Δ_z (рис. 4.21) был различен и соответствовал наклону колонны (рис. 4.22 б). Расчет проводился на основе шагового метода и, по сути, представлял математическое моделирование процесса нагружения. В процессе такого моделирования часть оголовка находящаяся в зоне контакта постоянно сминалась, пока зона контакта обеспечила восприятие нормальной силы. На рис. 4.23 показана деформированная схема оголовка и изополя эквивалентных напряжений.

4.9 Конструкции, работающие совместно с грунтовым основанием

Этот класс конструкций очень широк, разнообразен и относится к числу наиболее сложных для расчета. Это и конструкции подземных гаражей, тоннелей, шпунтов усиленных анкерами и просто шпунтов и мн.

др. Практически все инженерные сооружения покоятся на грунтовом основании.

Здесь можно выделить два класса за

дач со слабовыраженной границей размежевания. К первому классу относятся задачи, где инженера в одинаковой мере интересует как НДС собственно конструкций, так и НДС грунтового массива. Это задача по определению устойчивости склона, задачи по исследованию распространения волн в грунтовом массиве, вызванных динамическими воздействиями, задачи по определению осадок основания близлежащих строений, обусловленных созданием котлована под новое здание и мн. др.

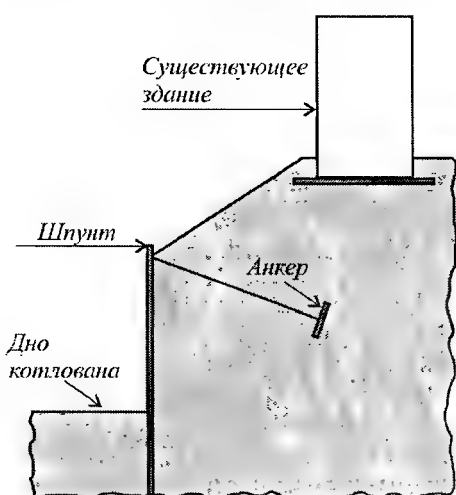


Рис. 4.24

На рис. 4.24 приведен пример такого класса задач. Здесь необходимо рассчитывать конструкции шпунта усиленного анкерами, определить возможные осадки основания под существующим зданием, обусловленные образованием котлована. В этом случае компьютерная модель должна учитывать совместную работу грунтового массива с конструкциями шпунтового ограждения. Задача не может быть решена за один прием, здесь

необходимо моделировать историю образования котлована: расчет изначального грунтового массива под нагрузку от существующего здания; частичное открытие котлована; устройство шпунтового ограждения; дальнейшее открытие котлована. На каждом этапе необходимо учитывать НДС конструкции и грунтового массива, полученное из предыдущего этапа. Сам грунтовый массив необходимо моделировать двумерными (если решается задача плоской деформации) или трехмерными (если задача решается в трехмерной постановке) физически нелинейными конечными элементами, использующими гипотезы Кулона, Кулона–Фадеева или другие зависимости.

На рис. 4.25 представлена другая задача*, целью которой было определение параметров вибрации на этажах проектируемого здания, вызванных импульсным воздействием «В» от торможения поезда метро.

В компьютерных моделях задач этого класса присутствует конечно-элементная модель грунтового массива. По сути, грунтовый массив – это бесконечное полупространство.

* Эти задачи взяты из реального проектирования. Их решение было проведено на основе ПК ЛИРА.

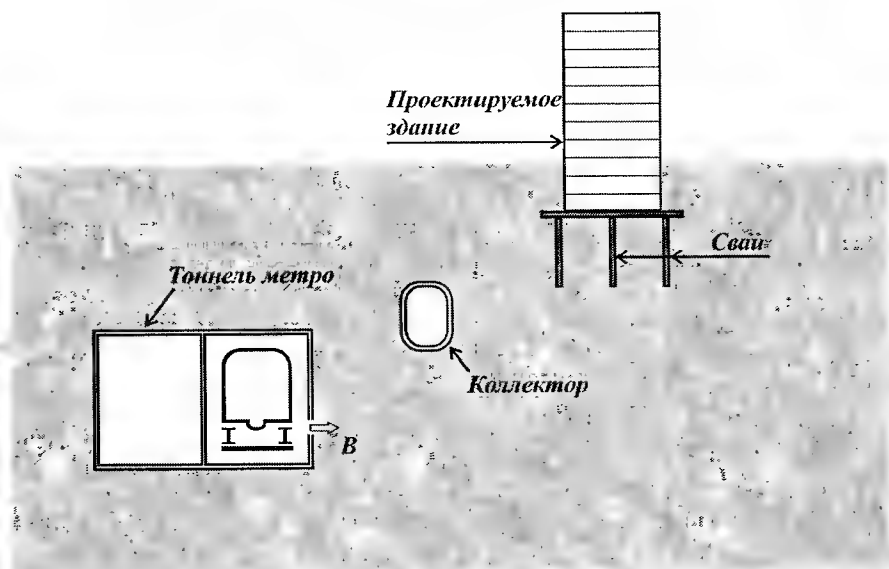


Рис. 4.25

Терминология. Часто в научной литературе встречается термин «упругое полупространство». Если со второй частью термина можно согласиться, то первая часть «упругое» совершенно не соответствует действительности, так как поведение грунта под нагрузкой далеко от поведения упругого тела. В этом смысле термин «грунтовый массив» более приемлем.

Так как численное решение задачи на основе МКЭ предусматривает рассмотрение ограниченной конечной области (сам термин *конечный* элемент подразумевает это), то всегда возникает вопрос о том, как ограничить бесконечное полупространство грунтового массива. Если снизу на обозримом расстоянии имеется слой грунта, имеющий модуль деформации (например, скала) значительно превышающий модуль вышележащих слоев, то вопрос об ограничении грунтового массива снизу решается сам собой. В противном случае, а также для ограничения грунтового массива с боковых сторон можно воспользоваться рекомендациями СНиП 2.02.01-83 «Основания и фундаменты» об определении величины сжимаемой толщи.

Здесь можно поступить следующим образом: определить по СНиП максимальную величину сжимаемой толщи H_{max} и границы грунтового массива назначить так, чтобы минимальное расстояние от любой точки границы до ближайшего узла рассчитываемой конструкции было меньше H_{max} сжимаемой толщи. Тип граничных условий в узлах конечно-элементной модели грунтового массива на его границе при статической нагрузке может быть принят в виде закреплений от линейных перемещений. В случае динамических воздействий, вызванных воздействием внутри или вне рассматриваемого грунтового массива тип граничных условий должен обеспечивать [4.11] гашение или прохождение

волн. По-видимому, при назначении граничных условий достаточно плодотворным может оказаться перенесение идеи В.И. Сливкера [4.12] о построении «бесконечных конечных элементов» для двухпараметровой клавишной модели грунтового основания на рассчитываемый класс задач.

Приведенные выше примеры и рассуждения демонстрируют большую сложность задач этого класса. Помимо большой размерности задач, их решение связано с реализацией нелинейного расчета. Программные комплексы обязательно должны включать режим автоматической триангуляции двумерных и трехмерных массивов конструкций с интенсивным разряжением по направлениям к границам грунтового массива. В библиотеке конечных элементов должны иметься двумерные и трехмерные конечные элементы, моделирующие физико-механические свойства грунта. Процессоры должны обеспечивать итерационные и прямые методы решения нелинейных уравнений.

Вместе с тем очень распространен другой класс задач, где инженера в первую очередь интересует НДС конструкции, а НДС грунта его интересует в меньшей степени – здесь его интересует максимальное напряжение под подошвой фундамента и максимальная осадка (что бы их величины не превышали допустимые). К этому классу относятся задачи расчета всех фундаментных конструкций: отдельно стоящих фундаментов, ленточных фундаментов, фундаментных плит.

Для решения этих задач используются многочисленные модификации клавишной модели грунта. Наиболее простая модель – основание Винклера. В этом случае взаимодействие конструкции фундамента и грунтового основания моделируется введением вертикальных связей с продольной жесткостью равной $C_1 \times F$, где C_1 – коэффициент Винклера, а F – «грузовая площадь» введенной связи. Эта модель очень распространена в инженерных расчетах, а в Западных странах является, чуть ли не единственной. Вместе с тем, такая модель имеет крупный недостаток: в физическом смысле она означает расчленение грунтового массива на отдельные «вертикальные столбики», каждый из которых работает самостоятельно. Вместе с тем грунт обладает так называемой «распределительной способностью». Под этим термином подразумевается, что, подвергаясь сжатию, каждый столбик грунтового массива вовлекает за собой за счет работы грунта на сдвиг соседние столбики. Этим во много объясняется широко известное положение о том, что грунт в около контурных зонах штампа или плиты значительно жестче, чем в срединных областях конструкции.

Это важное свойство грунта совершенно игнорируется моделью Винклера, хотя в ряде работ рекомендуется увеличивать величину C_1 , по мере удаления от центра фундаментной конструкции, правда, это больше относится к «натяжкам». Очень плодотворной является модель Пастернака [4.13], которая на основе введения второго коэффициента постели C_2 , учитывающего свойство грунта работать на сдвиг. С одной стороны,

модель Пастернака в реализации практически такая же простая, как и модель Винклера, с другой стороны, она учитывает распределительную способность грунта*. Существуют и другие модификации клавишных моделей, например, трехпараметровая модель [4.15]. В работе [4.16] приведены матрицы жесткости в аналитическом виде для конечных элементов по модели Пастернака. В этом случае компьютерная модель плиты на грунтовом основании включает набор следующих конечных элементов (рис. 4.26):

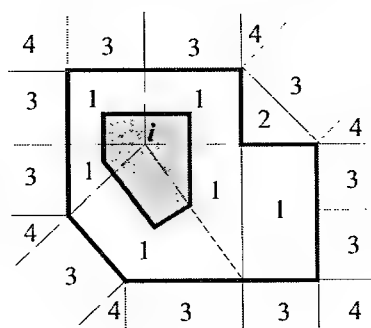


Рис. 4.26

Тип 1. треугольный и четырехугольный элемент плиты на грунтовом основании;

Тип 2. треугольный и четырехугольный элемент плиты на грунтовом основании с нулевой жесткостью плиты;

Тип 3. двухузловой законтурный элемент грунтового основания;

Тип 4. одноузловой законтурный элемент грунтового основания.

Законтурные элементы моделируют работу грунта за пределами конструкции. По сути, эти предложенные В.И. Сливкером [4.12] элементы являются конечными в смысле конечного числа узловых неизвестных, и бесконечными в смысле области элемента. Как правило, в программных комплексах конечные элементы конструкций на грунтовом основании реализованы так, что при задании $C_2=0$ они автоматически моделируют винклерово основание с заданным C_1 . Винклерово основание можно моделировать, используя конечные элементы собственно плиты, а грунтовое основание моделировать податливыми вертикальными связями, введенными в узлы конечно-элементной сетки с жесткостью $C_1 \cdot F_i$, где F_i – «грузовая площадь» i узла (см. заштрихованный участок на рис. 4.26). Этот способ удобен при необходимости учета отрыва конструкции. В этом случае вводимые связи должны быть односторонними.

Обычно, грунтовое основание имеет неоднородную структуру, обусловленную наличием разнородных слоев, карстов и другими особенностями. Современные программные комплексы должны иметь возможность по данным геологических изысканий автоматически строить модель грунтового основания, а затем в узлах или центрах тяжести конечных элементов автоматически определять C_1 и C_2 .

Существует много методик по определению C_1 и C_2 .

* Несколько ранее в работе [4.14] были предложены методы учета распределительной способности грунта, правда, из несколько других предположений.

Можно выделить два основных подхода, лежащих в основе многочисленных методик по определению C_1 (C_2 как правило определяется как функция от C_1).

I подход. В основе лежит выражение для усредненного модуля деформаций для слоев грунта, входящих в сжимаемую толщу, т.е.

$$E_0 = \frac{\sum_1^n \sigma_{z,p,i} h_i}{\sum_1^n \sigma_{z,p,i} h_i / E_i}; \quad \mu_0 = 1/H_c \sum_1^n \mu_i h_i;$$

$$C_1 = E_0 / H_c (1 - 2\mu_0^2); \quad C_2 = E_0 H_c / 6(1 + \mu_0)$$

где: $h\sigma_{z,p,i}$ – дополнительное вертикальное напряжение на глубине z в i подслое;

H_c – глубина сжимаемой толщи;

h_i, E_i – соответственно толщина и модуль деформации i -того слоя;

n – количество слоев грунта;

E_0, μ_0 – соответственно осредненные для заданных слоев грунта значения модуля деформации и коэффициента Пуассона;

C_1, C_2 – соответственно коэффициенты постели и сдвига. Характеристики грунтов $E, \mu, c, \gamma, \varphi$ определяются по результатам геологических изысканий или по СНиП 2.02.01 – 83 (приложение 1).

Эпюры бытового и дополнительного давлений определяются по методике описанной в СНиП 2.02.01 – 83 (приложение 2).

Глубина сжимающей толщи определяется на основе сравнения бытового σ_b и дополнительного σ_o давлений, т.е. граница сжимаемой толщи соответствует $\sigma_o(z) = \alpha \sigma_b$, где $\alpha < 1$, но и здесь существуют большие разночтения, для различных методик α меняется от 0,1 до 0,5.

II подход.

В основе лежит выражение: $C_1 = \frac{P}{\Delta}$

где P – давление на уровне подошвы фундамента

Δ – осадка.

Осадка определяется по формуле: $\Delta = \int_{H \text{ сж. толщи}} \varepsilon_z dz$

ε_z – послойные деформации грунта, которые, например, по методике Федоровского [4.15] определяются по формулам:

$$\varepsilon_z = \beta \begin{cases} \frac{\sigma - \sigma_0}{E_e}, & \sigma \leq p_c \\ \frac{p_c - \sigma_0}{E_e} + \frac{\sigma - p_c}{E_0}, & \sigma > p_c \end{cases}$$

где σ – суммарное эффективное вертикальное напряжение
 $\sigma = \sigma_0 - \sigma_p$;

σ_0 – начальное вертикальное эффективное напряжение до начала приложения нагрузки, т.е. бытовое давление σ_g за вычетом давление от грунта котлована и с добавкой давления от уже существующих соседних сооружений;

σ_p – дополнительное вертикальное эффективное напряжение;

E_0 – модуль общей (упругопластической) деформации;

$E_e = 8E_0$ – модуль упругой (обратимой) деформации;

p_c – структурная прочность на сжатие, зависящая от плотности (пористости) грунта и давления;

β – коэффициент, отражающий степень стесненности боковых деформаций и изменяющийся от $\beta_l = 0.7$ до $\beta_n = 1$.

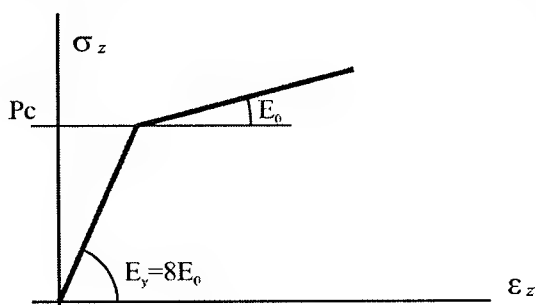


Рис. 4.27

По сути, выражение для ε_z отображает нелинейные свойства грунта, для которого принимаются различные модули деформации (рис. 4.27).

Каждая из многочисленных методик имеет недостатки.

Так методика, основанная на первом подходе, даёт заниженные результаты, так как

значения модулей деформаций E_i в выражении для E_0 не зависят от напряжений, в то время как для слабо нагруженных слоев эти значения должны быть существенно выше.

Во втором подходе также имеются несоответствия. Так в формуле для C_1 в числителе стоит давление под подошвой, в то время как в формуле для определения осадки участвуют также напряжения от близлежащих штампов нагрузки.

Опыт показывает, что хорошие результаты могут быть получены на основе первого подхода с введением коэффициентов, которые увеличивают значения E_i по глубине сжимаемой толщи, например, начиная от $k=1$ под подошвой фундамента и заканчивая $k=8 \div 12$ на границе сжимаемой толщи. Эти идеи рассматривались еще Г.К. Клейном.

В заключение приведем численный эксперимент: расчет одной и той же конструкции по нескольким моделям грунтового основания. На рис. 4.28 приведена модель балки под равномерно распределенную нагрузку $q=20 \text{ т/м.}$, лежащую на грунтовой массе. Конструкция имеет неограниченный размер вдоль оси y . Для расчета вырезана полоса шириной 1 м , т.е. рассматривается случай плоской деформации. Грунт имеет следующие характеристики: модуль деформации $E_0=1000 \text{ т/м}^2$; объемный

вес $\gamma=2 \text{ т/м}^3$; коэффициент Пуассона $\nu=0,4$; коэффициент сцепления $C=5 \text{ т/м}^2$; угол внутреннего трения $\varphi=45^\circ$.

На основе первого подхода были определены глубины сжимающей толщи (по длине балки она переменна и лежит в пределах 17м) и коэффициенты постели Винклера и Пастернака.

На рис. 4.28 а схематично показана первая модель. Грунтовый массив моделируется прямоугольными конечными элементами размером $0,5 \times 0,5 \text{ м}$ (на рисунке конечно-элементная сетка представлена очень укрупненной) и ограничивается по сторонам и по глубине размерами соответствующими сжимаемой толще. Тип конечного элемента реализует зависимости Кулона–Фадеева.

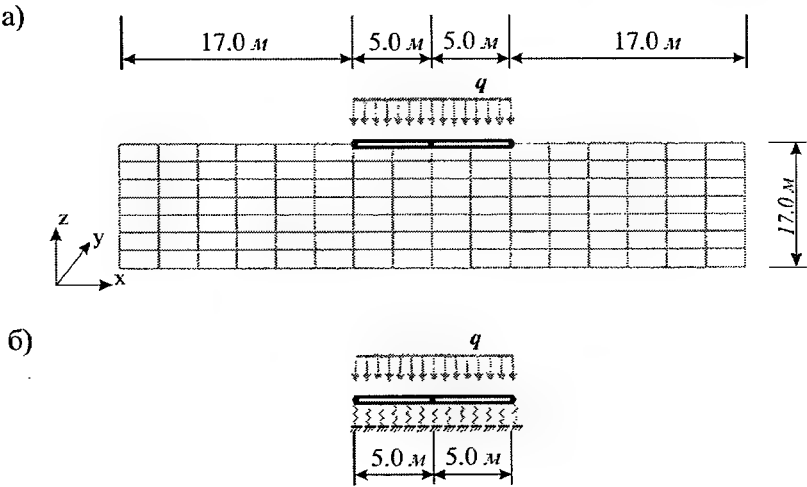


Рис. 4.28

На рис. 4.28 б представлена расчетная схема соответствующая клавишной модели грунта. Она была рассчитана с одним коэффициентом постели C_1 (модель Винклера) и с двумя коэффициентами постели C_2 (модель Пастернака). В таблице 4.3 представлены некоторые результаты расчета по трем моделям

Таблица 4.3

Характеристики НДС	Полупространство Кулона – Фадеева	Модель Винклера	Модель Пастернака
Вертикальное перемещение узла 1 в см.	10,5	14,8	10,0
Вертикальное перемещение узла 2 в см.	17,3	16,5	15,6
Изгибающий момент в узле 2 в тм.	25,9	16,7	21,5

Сравнивая результаты расчета по трем моделям можно сделать следующие выводы:

- Величины вертикальных перемещений имеют примерно одинаковый порядок.
- Характер перемещений различен. Для Винклеровской модели он примерно одинаков по всей длине (некоторое отличие объясняется различными величинами сжимаемой толщи), для грунтового массива вертикальное перемещение на краю значительно меньше, чем в середине.
- Различие в характере перемещений может сильно отразиться на НДС надземной конструкции, так момент в середине балки в первой схеме (25,9 *тм*) в 1,5 раза больше, чем во второй (16,7 *тм*).

Безусловно, модель полупространства Кулона–Фадеева более совершенна по многим причинам, среди них и учет большого количества физико-механических свойств грунта, и учет работы грунта за пределами конструкции и др.

Что касается модели Пастернака, то она значительно ближе к модели полупространства Кулона–Фадеева, так как по сравнению с моделью Винклера учитывает распределительные свойства грунта и, по-видимому, этой модели следует отдавать предпочтение при расчетах с использованием клавишных моделей.

Тем не менее, величины перемещений, полученные по трем вышеописанным моделям, лежат в пределах 10–17 *см*, что значительно больше перемещений для подобной задачи полученной по упрощенной методике (СНиП 2.02.01, обязательное приложение 2, пункт 8), по которой перемещения лежат в пределах 3–4 *см*. Инженеры–практики считают, что эта модель дает достаточно достоверные оценки. Это еще раз подтверждает высказанное выше предположение, что модуль деформации грунта надо принимать со значительным увеличением к границе сжимаемой толщи.

4.10 Плиты перекрытий, усиленные балками

Усиление плит балками достаточно часто встречается в современном домостроении. Расположение балок, как правило, нерегулярное, нет четко выраженной системы главных и второстепенных балок, балки могут иметь небольшую высоту и здесь часто нагрузки передаются на опоры за счет работы как собственно плиты, так и за счет балок.

В этом случае опыт расчета и проектирования ребристых перекрытий (эти примеры имеются в каждом учебнике по железобетонным конструкциям, где рекомендуется собирать нагрузку с плиты на второстепенные балки, считая опирание плиты на них жестким, затем рассчитать второстепенные балки, считая их опирания на главные балки

жестким и т.д.) малопригоден и может иметь разве что антикварную ценность.

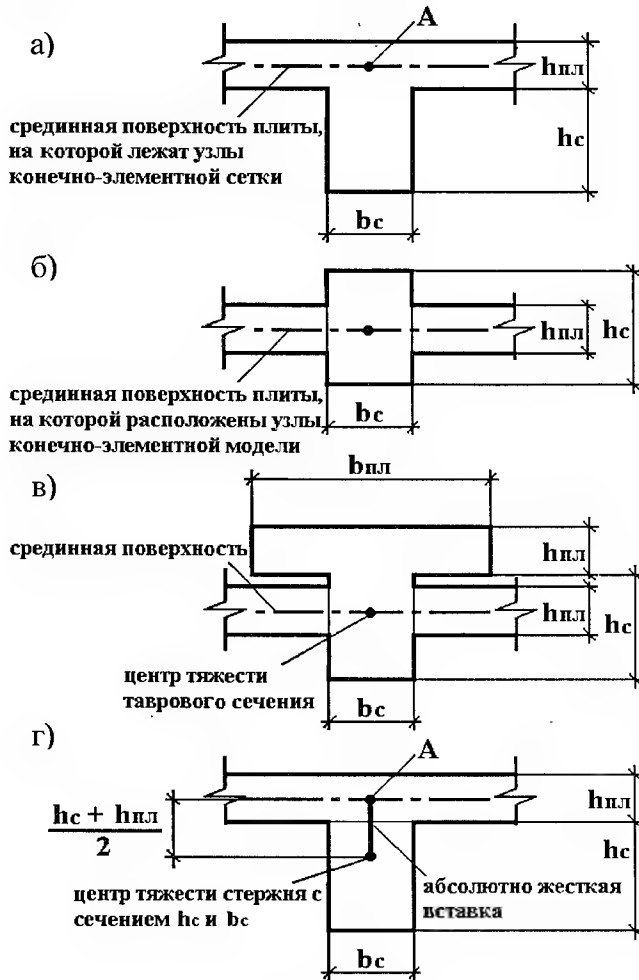


Рис.4.29

система с взаимным расположением плиты и балки, представленным на рис. 4.29 б. Конечно, такая модель не выдерживает никакой критики. Можно ввести тавровое сечение балки. Взаимное расположение плиты и балки в этом случае представлено на рис. 4.29 в. Но здесь возникает вопрос о том, как назначить ширину полки. Разные методические материалы дают различные рекомендации – от 6 до 15 толщин плиты. Кроме того, по этой схеме работа плиты учитывается дважды. Правда это вполне допустимо, так как конечные элементы плиты моделируют изгибную группу усилий, а часть плиты в составе полки балки моделирует мембранную группу усилий.

Достаточно адекватной является модель, предложенная в [4.17], где взаимодействие плиты и балки представлено на рис. 4.29 г.

С другой стороны, с точки зрения метода конечных элементов как будто бы не должно быть никаких проблем: вводится конечно-элементная сетка плиты с базовыми точками на линиях балок, нагрузка прикладывается по верху плиты и т.д. Но здесь возникает много проблем связанных со стыковкой в конечно-элементной модели элементов различной мерности (эта проблема уже обсуждалась в разделе 4.1). Главная проблема здесь – как назначить жесткость балки.

Если в конечно-элементную модель плиты, узлы сетки которой лежат на срединной поверхности, ввести стержни сечением $h_c \times b_c$, то будет рассчитана

В этом случае стержни сечением $h_c \times b_c$, подвешиваются при помощи абсолютно жестких вставок к узлам конечно-элементной модели плиты, лежащими в ее срединной поверхности. Здесь (в отличие от моделей рис. 4.29 б и рис. 4.29 в, где в конечных элементах плиты и стержней возникает только изгибная группа усилий, а каждый узел конечно-элементной схемы имеет три степени свободы – вертикальное перемещение и два угла поворота) каждый узел конечно-элементной схемы имеет пять степеней свободы – три линейных перемещения и два угла поворота, а конечные элементы плиты испытывают кроме изгибной также мембранную группу усилий*, а в стержневом элементе, кроме изгибающего момента (M_c) и поперечной силы, возникает еще и нормальная сила (N_c).

Хотя последняя модель и наиболее полно отображает действительную работу конструкции, и снимают вопрос о назначении ширины полки в тавровой балке, вместе с тем возникают трудности на последних этапах проектирования балки. Конечно можно просто рассчитать сечение стержня $h_c \times b_c$, на полученные в нем усилия M_c и N_c . Однако, как правило, значение N_c велико, и он будет законструирован как внецентренно растянутый элемент и подобранная арматура в нем будет распределена по всему периметру, в то время как по правилам конструирования балочных ростверков арматура должна быть расположена у нижней и верхней грани. Таким образом, для конструирования желательно рассматривать тавровое сечение балки, подверженное изгибу, однако неясно какой изгибающий момент действует на балку и неясно какое сечение балки надо рассчитывать.

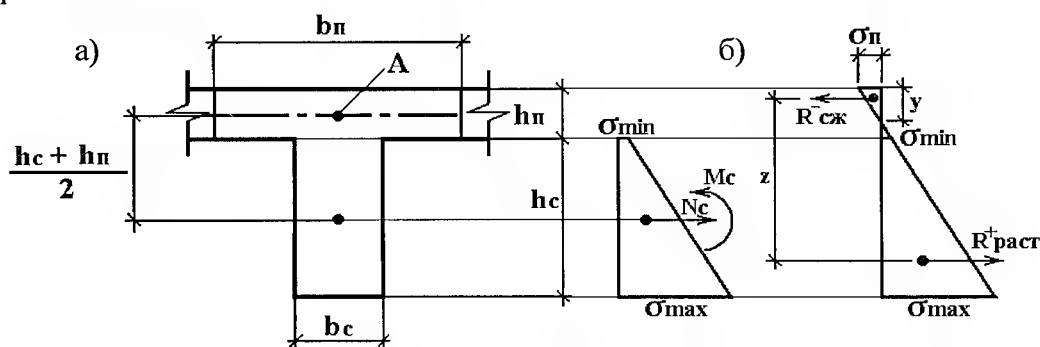


Рис.4.30

В этом случае можно рассматривать следующий инженерный подход, основанный на гипотезе о том, что равнодействующая мембранных сил плиты, уравновешивающих нормальную силу в подвешенном стержне (N_c), приложена в центре плиты (точка А рис. 4.30 а). Тогда можно считать, что изгибающий момент, действующий на балку таврового сечения равен $M_6 = M_c + N_c \times 0.5(h_c + h_n)$. Остается только определить ширину полки

* Хотя эти элементы и плоские, но они моделируют как изгибную, так и мембранную группу усилий, т.е. набор усилий характерный для оболочек.

тавровой балки. Здесь можно с некоторой натяжкой использовать выше принятую гипотезу: если центр тяжести мембранных сил приложен в центре плитной части (точка А), то полка должна быть равномерно сжата. Так как арматура будем рассчитываться в рамках предположений о предельном состоянии сечения, то напряжение в полке будет R_b . Поэтому ширина полки $b_n = N_c / (h_n \times R_b)$.

Поперечная сила в балке определяется как первая производная (при численных расчетах используется конечноразностный подход) от моментов $M_b(x)$. Так как эпюры M_c и N_c в стержне имеют ступенчатый вид (рис. 4.33 г), т.е. в каждом сечении имеется два значения момента и нормальной силы, то их следует либо усреднить, либо брать их значения в серединах отрезков. Конечно, предположения о том, что напряжения в полке для определения M_b приняты постоянными, а при определении b_n равны R_b , в ряде случаев могут оказаться недостаточно удачными, поэтому ниже приводится несколько другой подход основанный на гипотезе плоских сечений (рис. 4.30 б). Деформация сечения определяется на основе эпюры напряжений в сечении стержня:

$$\sigma_{\max} = +N_c/F_c + M_c/W_c; \sigma_{\min} = +N_c/F_c - M_c/W_c; F_c = h_c \times b_c; W_c = b_c \cdot h_c^2 / 6.$$

Далее наклон сечения продлевается в область плиты и из геометрических соотношений определяется $\sigma_n, y, z, R_{сж} = R_{раст}$.

После этого определение M_b и b_n представляется делом техники:

$$M_b = R_{раст} \times z \quad b_n = R_{сж} / (0,5 \sigma_n \times y)$$

Для иллюстрации вышеприведенных рассуждений приведем численный пример (рис. 4.31). Рассчитывается плита пролетом 6м, шарнирно опертая по двум сторонам (длиной 5м). В середине плита

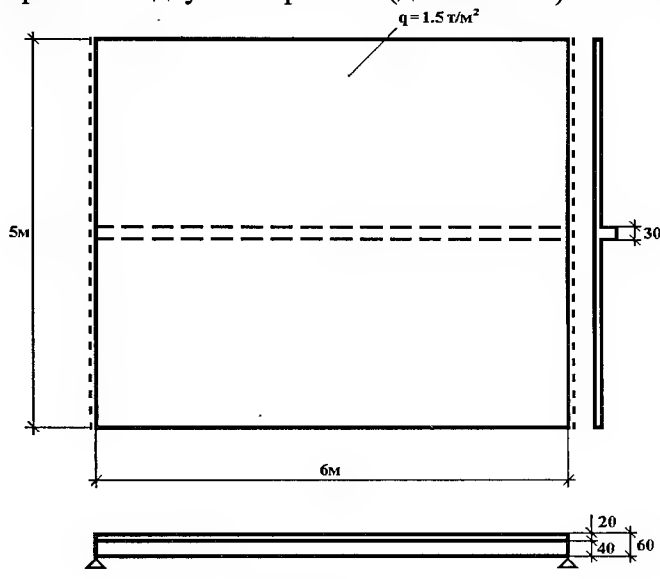


Рис. 4.31

подперта балкой 40х30см. Нагрузка на плиту $1,5\text{т/м}^2$. На рис. 4.32 приведены результаты расчета этой плиты по схеме, аналогичной схеме на рис. 4.29 в, т.е. конечно-элементная модель представляет собой набор плитных элементов совместно с изгибным стержнем таврового сечения,

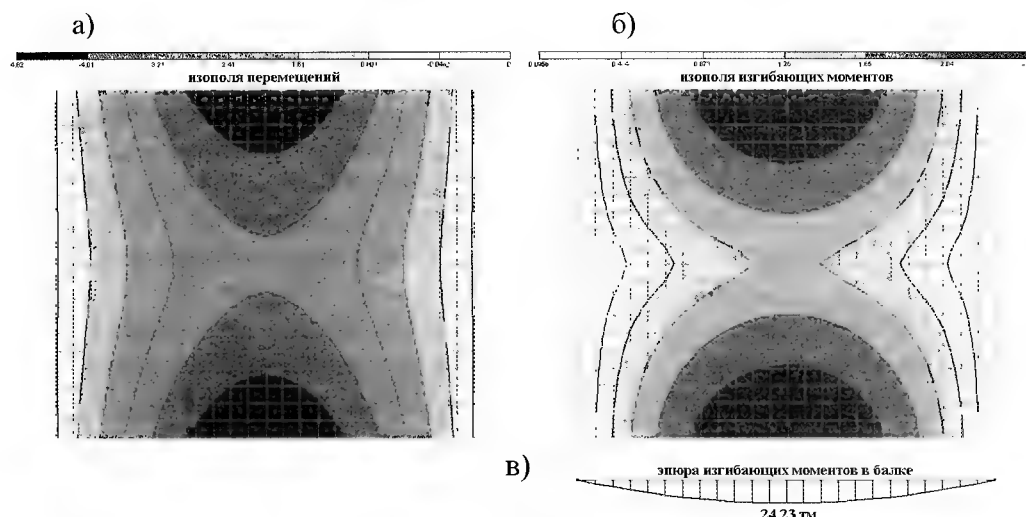


Рис. 4.32

имеющим ширину полки 1,5м, т.е. свесы приняты по $3 \times \delta = 0.6\text{м}$.

На рис. 4. 32 а приведены изополя перемещений, на рис. 4. 32 б – изополя M_x и на рис. 4. 32 в – эпюры моментов в балке таврового сечения. На рис. 4.33 приведены результаты расчета по схеме аналогичной рис. 4.29 г. Здесь плита моделируется конечными элементами оболочечного типа, а стержневой элемент размерами 40х30см подвешивается к узлам расчетной схемы на абсолютно жестких вставках длиной $0.5 \times (40 \times 20) = 30\text{см}$.

На рис. 4. 33 а приведены изополя перемещений, на рис. 4.33 б – изополя M_x в плите, на рис. 4. 33 в – изополя N_x в плите, на рис. 4. 33 г – эпюры моментов в стержневом элементе, а на рис. 4. 33 д – эпюры нормальных сил в стержневом элементе.

Сравнивая результаты обоих расчетов, видим, что они примерно одинаковые, практически совпадают перемещения, моменты в плите и моменты в балке. Момент в балке по первой схеме в середине пролета равен 24,23тм, а в гипотетической второй балке $M = 3,77 + 68,58 \times 0,3 = 24,34\text{тм}$, где:

3,77 и 68,58 – момент и нормальная сила в подвешенных стержнях,
0,3 – величина абсолютно жесткой вставки.

Таким образом, подход с непосредственным введением в расчет тавровых балок (рис. 4.29 в, рис. 4.32) более легок в реализации и удобен для последующего конструирования балок. Опасения, что в этом случае

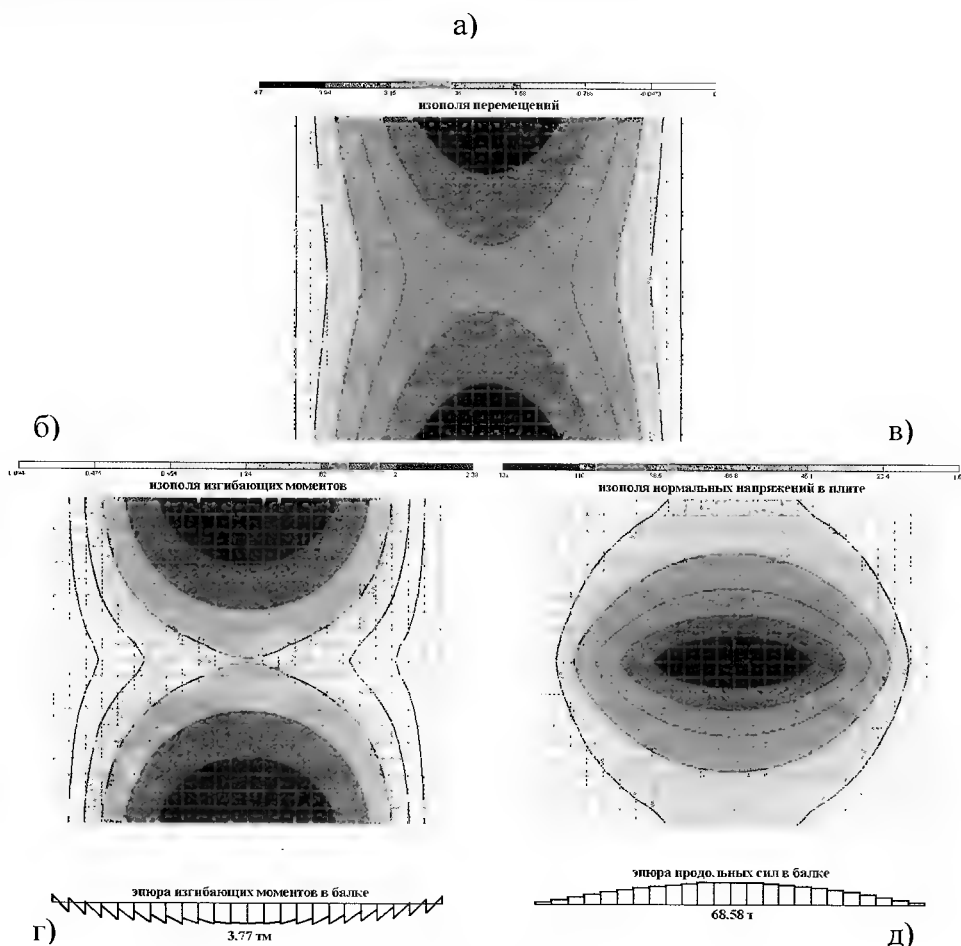


Рис. 4.33

плита учитывается дважды, не имеют особых оснований, так как здесь просто отдельно учитывается мембранная и изгибная группы возникающих в плите усилий. Конечно, возникает вопрос о том, какую ширину полки тавровой балки принять. методика представленная на рис. 4.30 очень громоздка и требует предварительного расчета по уточненной конечно-элементной схеме – рис. 4.29 г. В приведенном численном примере свесы полок были приняты $3h_n$ (т.е. вся ширина полки составляет $3 \times 0,2 + 0,3 + 3 \times 0,2 = 1,5\text{ м}$) и это оказалось удачным. Можно рекомендовать размеры свесов $2h_n - 4h_n$, хотя эта рекомендация очень приблизительна, и в каждом отдельном случае специалист сам должен принять решение.

Если высота балок соизмерима с толщиной плиты, то балки имеет смысл моделировать утолщенными конечными элементами плиты или оболочки. В работе [4.18] проведены численные исследования и даны рекомендации, что такое моделирование возможно, если $h_0 < 3h_{пл}$.

На рис. 4.34 приведен фрагмент конечно-элементной сетки плиты усиленной балкой небольшой высоты. В этом случае желательно чтобы размеры конечных элементов плиты были соизмеримы с шириной балки.

На рис. 4.35а соответствующей случаю, когда плита и балка моделируются конечными элементами плиты. Более совершенная модель представлена на рис. 4.35 б, когда плита и балка моделируются конечными элементами оболочки, а их расчетные узлы смещены по вертикали на величину $\frac{h_{\phi} - h_{пл}}{2}$, что моделируется введением абсолютно жестких вставок.

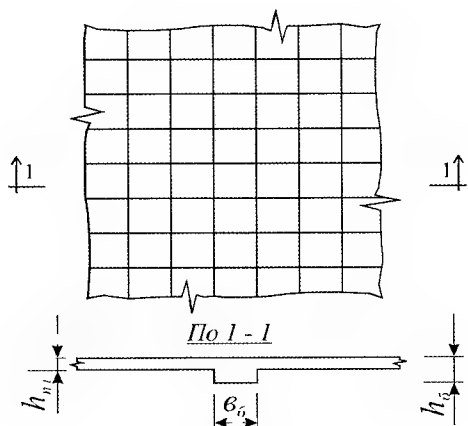


Рис. 4.34

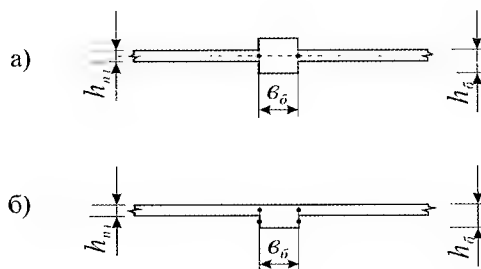


Рис. 4.35

4.11 Конструкции высотных зданий из монолитного железобетона

Конструкции высотных зданий из монолитного железобетона представляют достаточно распространенный класс и это заслуживает рассмотрения особенностей их работы и приемы построения компьютерных моделей в отдельном разделе. Учитывая востребованность в настоящее время конструкций такого типа, в этом разделе будут обсуждаться не только проблемы построения компьютерных моделей, но и даваться некоторые рекомендации по конструированию.

Демонстрация и исследование различных особенностей работы каркасных конструкций высотных зданий будет проводиться на конкретных численных примерах. Большинство примеров носит тестовый характер и, как правило, это плоские схемы, на которых легче выявить и проанализировать те или иные эффекты. С одной стороны всем тестовым примерам будет придаваться жизненный характер (сечения, материал, нагрузки будут максимально приближены к действительности), с другой стороны анализ всегда будет проводиться с «оглядкой» на пространственную схему, а иногда и с иллюстрациями конкретных объектов. Для демонстрации некоторых эффектов работы конструкций высотных зданий, обусловленных совместной работой ее элементов, проведем небольшое исследование на простом тестовом примере.

На рис. 4.36 приведена плоская схема, моделирующая фрагменты каркасной конструкции. Условно можно считать, что из пространственного 25-этажного каркаса вырезана двухметровая полоса. Ширина полосы диктуется наиболее часто встречающимся шагом свай 2 м (как правило, основанием каркасных конструкций высотных зданий является фундаментная плита на свайном поле). Сечения элементов приняты из следующих соображений:

Средняя диафрагма (ширина 3 м, толщина 0,2 м) моделирует ядро жесткости, располагающееся, как правило, в центре здания. Диафрагма моделируется одним стержнем с соответствующей жесткостью, а учет ее ширины производится на основе введения абсолютно жестких вставок по 1,5 м – прием достаточно распространенный и очень эффективный.

Крайние колонны (пилоны) имеют тавровое сечение с размерами полки 2×0,2 м (моделируется несущая железобетонная стена подземного этажа).

Нижняя балка размером 2×1,2 м моделирует двухметровую полосу фундаментной плиты толщиной 1,2 м. Эта полоса фундаментной плиты опирается на 7 свай с шагом 2 м.

Верхняя балка моделирует плиту перекрытия толщиной 18 см, т.е. ее размер принят 2,0×0,18 м.

Несущая способность свай 200 т, однако, их податливость различна: сваи 1 и 7 имеют осадку 1 см, сваи 2 и 6 – 1,5 см, а сваи 3, 4, 5 – 2 см. Такая различная жесткость свай отображает известное предположение, что жесткость свай и грунтового основания в периферийных зонах значительно выше, чем в средних зонах фундаментной плиты.

Равномерно распределенная нагрузка на перекрытия принята 2 т/м^2 . такая нагрузка является наиболее характерной для зданий такого типа, она включает нагрузку от собственного веса конструкций, перегородок, наружных стен, оборудования, полезную нагрузку, и очень часто именно эта цифра фигурирует при оценочном определении веса здания. Поэтому нагрузка на балку моделирующую полосу перекрытия шириной 2 м принята: $q = 2 \text{ т/м}^2 \times 2 = 4,0 \text{ т/м}$.

Нагрузка от вышележащих конструкций моделируется вертикальными силами на среднюю стойку 600 т и на крайние стойки – по 300 т.

На рис. 4.37 а и 4.37 б приведены эпюры изгибающих моментов и нормальных сил в конструктивных элементах. На рис. 4.35 а и 4.35 б приведены эпюры тех же усилий, если бы перекрытия и фундаментная плита рассчитывались отдельно, т.е. перекрытия рассчитывалось на опорах, имеющих внизу жесткие защемления, а фундаментная плита рассматривалась без учета совместной работы с вышележащими конструкциями на нагрузки, соответствующие усилиям в вертикальных элементах, собранные по грузовым площадям.

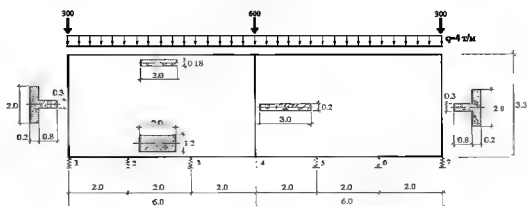


Рис.4.36

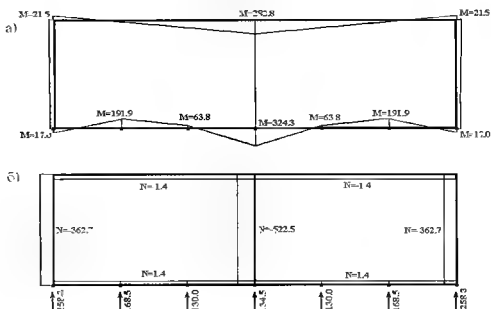


Рис. 4.37

Сравнивая эти результаты можно отметить следующие эффекты, выявленные на основе учета совместной работы элементов каркаса.

Эффект 1: первая схема более жесткая, т.е. в отношении к свайному основанию больше приближается к жесткому штампу. Это приводит к определенной перегрузке крайних свай, имеющих большую жесткость. Этот эффект будет более подробно рассмотрен в разделе 5.

Эффект 2: изгибающие моменты в фундаментной плите в первой схеме ($M_4 = 324,3 \text{ тм}$) меньше, чем во второй ($M_4 = 404,3 \text{ тм}$), так как группа мембранных сжимающих усилий в вышесказанных перекрытиях и растягивающих в фундаментной плите создает пару, уменьшающую изгибающие моменты в фундаментной плите (эффект пространственной фермы Веренделя). Сами по себе величины мембранных усилий

незначительны (сжимающие усилия в полосе первого перекрытия всего $1,4t$) и мало влияют на напряженно-деформированное состояние плит, но большое плечо этих групп усилий (высоты этажей) делает весьма существенным разгрузочный эффект.

Эффект 3: схема работы крайних стоек по двум сравниваемым схемам отлична. Реальные расчеты высотных зданий показывают, что крайние колонны (пилоны) как правило, испытывают значительные изгибающие моменты, обусловленные необходимостью воспринять сдвиговые усилия, чтобы вовлечь в работу плиту вышележащего перекрытия и вообще их схема работы отличается от схемы представленной на рис. 4.38. Этот эффект (в рассмотренном примере проявлен не так четко) достаточно неприятен и далее будут приведены некоторые рекомендации по его смягчению.

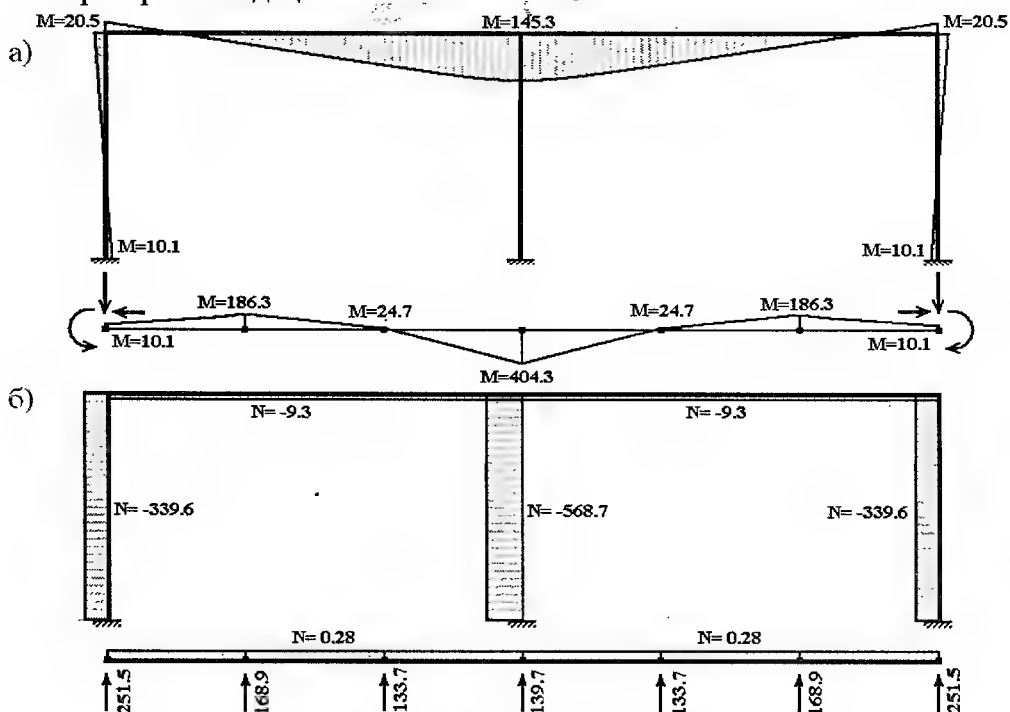


Рис. 4.38

Эффект 4: нормальные усилия в средней колонне по первой схеме меньше, чем во второй. Этим объясняется, что осадка средней сваи больше, чем крайних, т.е. средняя колонна имеет менее жесткую опору, и она как бы висит на крайних колоннах за счет работы на изгиб плит перекрытий. Интересно отметить, что влияние этого эффекта часто приводит в недоумение специалистов, определявших усилия в вертикальных элементах по грузовым площадям, а расчет совместно со свайным (грунтовым) основанием показывает значительные отличия.

Конечно, приведенный пример очень схематичен. Однако даже на таком схематичном примере можно убедиться, насколько важно учитывать

совместную работу всех элементов каркаса и именно эту цель преследуют приведенные выше эффекты, которые исчерпывают далеко не все особенности вызванные учетом совместной работы. Многие из них, по мнению авторов наиболее важные, будут рассмотрены ниже.

Исследование работы всех элементов каркаса в рамках общей компьютерной модели не очень технологична: во-первых, это технологически неудобно, во-вторых, для исследования отдельного элемента (плиты перекрытия, диафрагмы) необходима густая сетка, а это может привести к определенным затруднениям при решении уравнений с большим количеством неизвестных (время счета, плохая обусловленность матрицы). Для зданий высотой более 40 этажей это может быть несколько миллионов неизвестных. Поэтому здесь необходимо использовать приемы стратификации (несколько расчетных схем, каждая из которых моделирует то или иное свойство конструкции), фрагментации (общая схема рассчитывается с достаточно редкой сеткой, затем вырезаются фрагменты плиты перекрытий, диафрагмы, которые рассчитываются уже с достаточно густой сеткой на местную нагрузку, а отброшенные части конструкции заменяются соответствующими усилиями), приемы метода суперэлементов. Так в ПК МОНОМАХ разработан удобный инструмент для проведения стратифицированного расчета: пользователь может указать отдельный элемент конструкции (плита, диафрагма), для которого триангуляция будет автоматически выполнена с мелким шагом. Таким образом, в рамках общей схемы информация о работе этого элемента будет более полной. Ниже будут исследованы особенности работы отдельных элементов каркаса, хотя все время будет иметься ввиду их совместная работа в общей схеме.

Вертикальные элементы каркаса (колонны, пилоны, диафрагмы).

Вертикальные элементы каркаса, жестко связанные с плитами перекрытий и фундаментной стеной создают очень жесткую конструкцию. Вертикальные нагрузки могут значительно перераспределяться между вертикальными элементами, горизонтальные нагрузки обуславливают не только изгибающие моменты в вертикальных элементах, но и появление в них вертикальных усилий. В этом случае плиты перекрытий вовлекаются в работу на изгиб и сдвиг. Этот эффект продемонстрирован на рис. 4.39. Так же как и в схеме, представленной на рис. 4.36 условно «вырезана» двухметровая полоса многоэтажного здания, т.е. величина ветровой нагрузки, жесткости горизонтальных элементов, моделирующих работу плит перекрытий и другие параметры примерно соответствуют конструктивной схеме шириной 2м.

На рис. 4.39 а даны усилия в вертикальных элементах нижнего этажа и горизонтальное перемещение U_a точки a для схемы, в которой принята жесткая связь плит перекрытий и вертикальных элементов, на рис. 4.39 б приведены те же характеристики НДС для схемы, в которой принято, что

перекрытия воспринимают только мембранную группу усилий, т.е. они только передают горизонтальные нагрузки на вертикальные элементы.

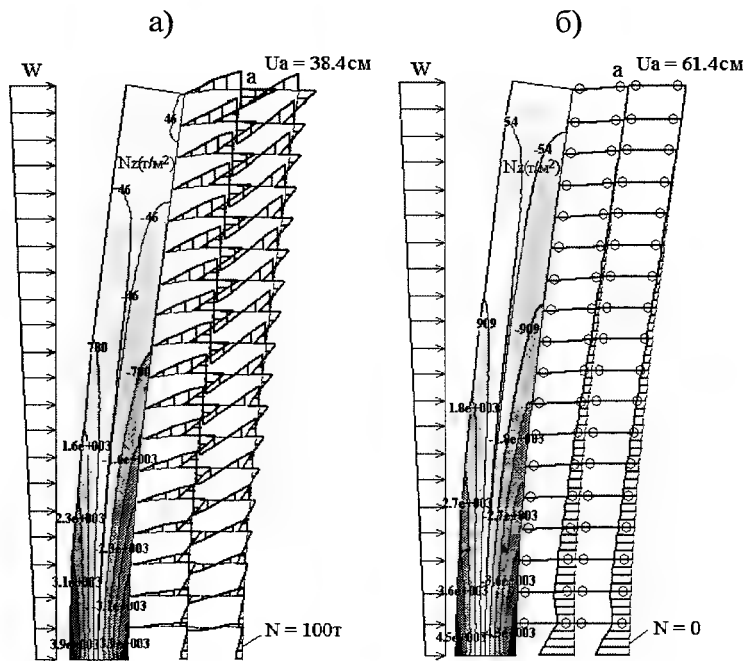


Рис. 4.39

Как видно первая схема более жесткая, перемещения верха здания в 1,6 раза меньше, чем во второй схеме. Плиты перекрытий работают на сдвиг как своеобразные шпонки между вертикальными элементами, и хотя их жесткость на сдвиг невелика, их большое количество обуславливает дополнительную жесткость конструкции за счет вовлечения в работу крайних колонн и диафрагм на нормальные усилия. На рис. 4.39 при анализе эпюр изгибающих моментов на колоннах можно наблюдать известный «рамно-связевый» эффект. Он вызван тем, что от горизонтальных нагрузок деформированная схема отдельной диафрагмы (рис. 4.40 а) и рамы (рис. 4.40 б) имеют разные формы, что обуславливает возникновение больших изгибающих моментов в колоннах на верхних этажах. Хотя в безригельных каркасах этот эффект смягчается отсутствием ярко

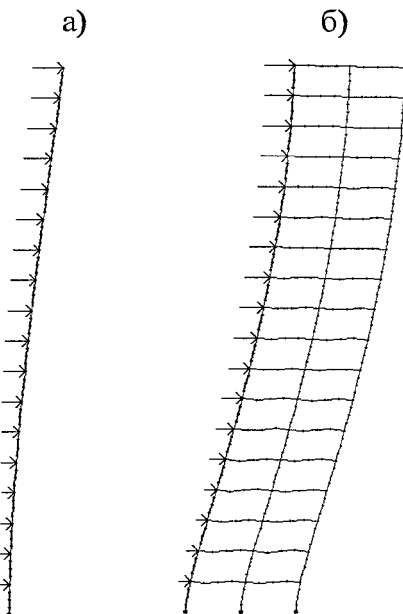


Рис. 4.40

выраженных рам, все же он может привести в случае его не учета к возникновению микротрещин в верхних колоннах, тем более, что нормальные силы в верхних этажах могут не обеспечить необходимое обжатие. Это может привести к увеличению деформативности каркаса, а также к ухудшению условий работы плит перекрытий верхних этажей, так как защемление плит в колонне будет частично нарушено, а это как будет показано в далее для плит достаточно существенно.

Другой эффект (эффект 3) может оказаться крайне неприятным для колонн расположенных в периферийных зонах здания. Чтобы снять большие моменты и сдвиговые усилия, возникающие в крайних колоннах можно рекомендовать конструировать крайние колонны в виде пилонов, располагая большую сторону пилона вдоль контура плиты перекрытия, т.е. уменьшая ее жесткость в плоскости действия сдвиговых усилий (рис. 4.41).

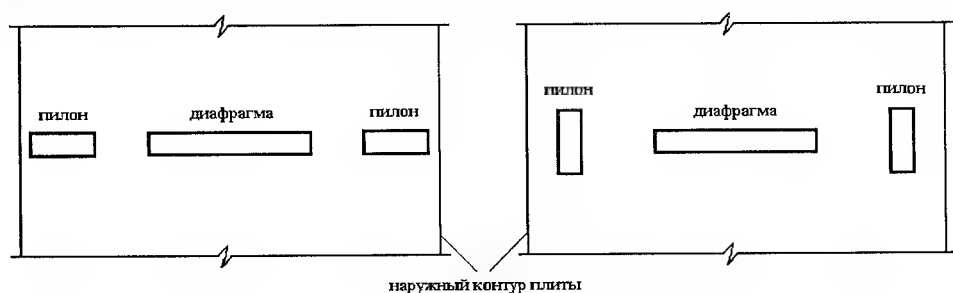


Рис. 4.41

При этом совместная работа фундаментной плиты и вышележащих перекрытий будет обеспечиваться за счет работы диафрагм, а для верхних колонн влияние «рамно-связевого» эффекта будет смягчаться. Правда, в этом случае деформативность каркаса будет несколько завышена, однако, как правило, жесткость каркаса на горизонтальные нагрузки обеспечивается с большим запасом. При компьютерном моделировании диафрагм последние могут представляться как стержни или как пластинчатые элементы.

На рис. 4.42 представлены различные расчетные модели одноэтажной диафрагмы (пилона). Модель (рис. 4.42 а) часто применяется при автоматической

триангуляции общей схемы здания с применением редкой сетки. Здесь не надо опасаться большой потери точности из-за крупной сетки, т.к. по высоте диафрагма имеет большое

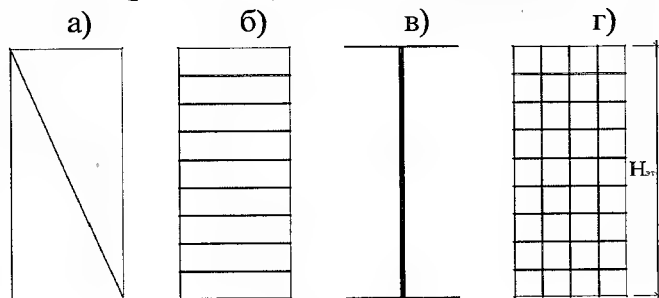


Рис. 4.42

количество этажей, и такое расчленение может оказаться достаточным.

Если принимается решение в пользу более густой сетки то предпочтительней расчленение типа, показанного на рис. 4.42 б, вместо типа, показанного на рис. 4.42 г, которое лучше применять при подробном исследовании диафрагмы. Иногда диафрагма может быть заменена стержнем (это решение наиболее предпочтительно для общей схемы здания, хотя и затруднительно в реализации), а учет ширины диафрагмы при стыковке ее с другими элементами реализуется жесткими вставками (рис. 4.42 в) или абсолютно жестким телом.

При автоматической триангуляции диафрагм или при «ручной» разбивке их на конечные элементы могут использоваться как оболочечные конечные элементы, так и элементы балки-стенки. Опыт показывает, что результаты расчета общей схемы здания на горизонтальные нагрузки в этих случаях практически одинаковые. Объяснение этого результата аналогично известным представлениям об аналогичности расчета ферм с жесткими или шарнирными узлами.

В случае если диафрагма имеет большое количество нерегулярно расположенных отверстий, можно рекомендовать использовать принцип фрагментации*, заключающийся в вычленении из общей схемы поперечника и замены отброшенных частей конструкции действующими в местах отчленения усилиями. В дальнейшем в таком фрагменте уже может быть использована более густая сетка, определены места концентрации усилий и т.п.

Еще одной особенностью вертикальных элементов современных каркасов, являются широко применяемые непрямоугольные формы сечений колонн (крестовых, уголковых, тавровых). Как правило, главные оси этих сечений не совпадают с глобальными осями, относительно которых ведется расчет. Влияние этого эффекта продемонстрировано на рис. 4.43. Здесь представлены результаты расчета П-образной рамы, у которой стойки имеют уголковое сечение. В связи с тем, что ни одна из главных осей сечений стоек не совпадает с плоскостью рамы, узлы последней имеют перемещения ортогональные плоскости рамы к действию нагрузки (рис. 4.43 а). Если узлы рамы закрепить из плоскости, то в наложенных связях появляются усилия (рис. 4.43 б). Этот эффект** обуславливает появление ортогональных к направлению действия нагрузок усилий в элементах каркаса не только от закручивания (в случае если равнодействующая горизонтальных усилий не проходит через центр жесткостей), но и от наличия колонн с указанными выше сечениями.

Как правило, армирование узлов сопряжения вертикальных элементов с плитами выполняется таким образом, чтобы обеспечить упругое

* В программном комплексе МОНОМАХ эта операция выполняется автоматически.

** В программном комплексе ЛИРА реализована процедура (определения углов чистого вращения, определения усилий относительно главных осей с последующим определением усилий относительно заданных осей), учитывающая этот эффект автоматически.

защемление, т.е. по сути, обеспечить совместную работу всех элементов каркаса.

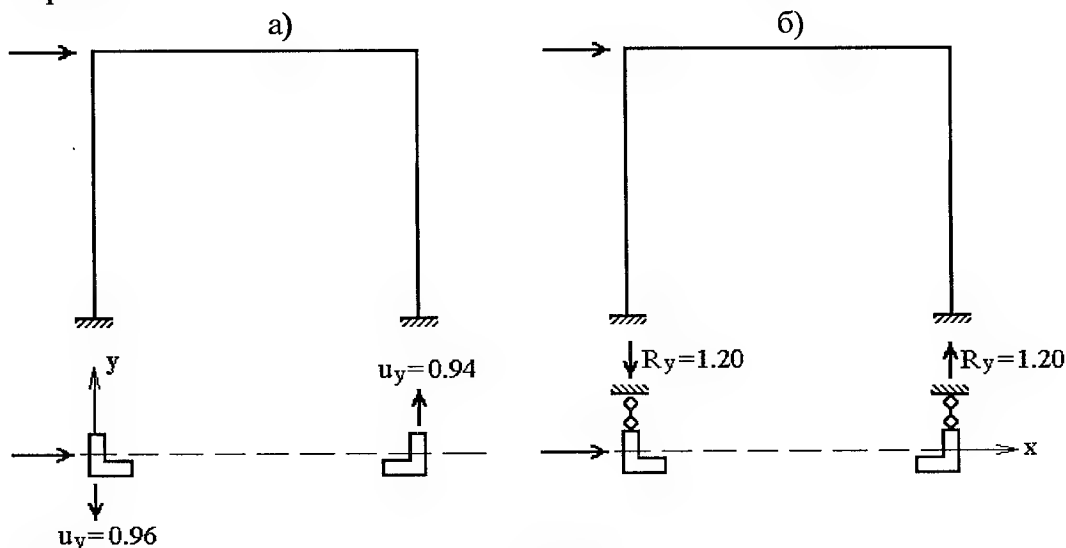


Рис. 4.43

Это, как указывалось выше, уменьшает деформативность каркаса на горизонтальные воздействия, уменьшает пролетные моменты в плитах и, следовательно, их деформативность. Однако при этом и без того наиболее нагруженные узлы сопряжения вертикальных элементов с плитами (необходима установка арматуры для восприятия больших поперечных сил, необходима установка большой верхней арматуры) могут оказаться переармированными. Поэтому в случае, когда нормативная деформативность всего каркаса обеспечена только диафрагмами, а толщина плит достаточна, чтобы обеспечить прочность и деформативность перекрытия при шарнирном опирании на вертикальные элементы, эти узлы целесообразнее делать шарнирными, т.е. дополнительную арматуру, обеспечивающую упругое защемление не ставить.

Поэтому при расчете конструкций высотных зданий следует использовать несколько вариантов компьютерных моделей, варьируя, в том числе различные конструктивные решения сопряжения вертикальных элементов и плит перекрытий: шарнирные (в этом случае для колонн используются шарнирные стержни, а для диафрагм – элементы балок-стенок) и жесткие (для колонн шарниры отсутствуют, а для диафрагм используются плоские оболочечные элементы).

Безбалочные плиты перекрытий.

Как уже указывалось, плиты перекрытий высотных зданий имеют ряд особенностей, которые значительно отличают их от ранее применявшихся сборных плит перекрытий на прямоугольных планах. К основным особенностям можно отнести: сложную конфигурацию в плане; нерегулярно расположенные опоры различного сечения – диафрагма, пилоны, крестовые, уголкового, тавровые колонны; нерегулярно

расположенные отверстия; нерегулярные включения балочных ростверков; переменная толщина плиты, вызванная необходимостью усиления опорных зон плиты в районе колонн. Важным фактором являются возможные неравномерные осадки опор плиты, особенно для верхних этажей, обусловленные не так нагрузкой собственно на плиту рассматриваемого перекрытия, как неравномерными укорочениями вертикальных элементов в общей схеме здания.

На рис. 4.44 а показаны изополя прогибов плиты верхнего этажа полученной на основании расчета плиты в составе общей схемы здания, а на рис. 4.44 б – расчет той же плиты из условия, что опоры плиты не имеют вертикальных перемещений. В действительности такие разительные отличия результатов несколько сглаживаются, так как в результате возведения здания неравномерная осадка опор уже происходит от собственного веса (это 50-70% всей нагрузки) и к моменту замоноличивания верхних этажей эта осадка в значительной степени уже «выбрана». В течение эксплуатации этот эффект может усугубиться за счет деформаций ползучести, которые в наиболее нагруженных элементах (колонны и пилоны по сравнению с диафрагмами) будут протекать более интенсивно и плиты перекрытий будут «зависать» на диафрагмах.

Если специалисту не удастся отследить эти процессы на основе компьютерного моделирования процесса возведения здания, а затем эксплуатационных стадий, на которых отслеживаются деформации ползучести, он должен примерно оценить возможную действительную неравномерность осадки опор и на них произвести расчет плиты перекрытия. На основе опыта можно рекомендовать такой приближенный подход: определить перемещения опор из расчета общей схемы здания, а затем рассчитать плиту на местную нагрузку и на величины осадок, составляющих 15-20% осадки, определенных из рассмотрения общей схемы*.

Наличие многочисленных нерегулярных отверстий как правило не вызывает труднопреодолимых ситуаций для армирования плиты. По сути отверстия изменяют расчетную схему плиты, а плита максимально успешно использует все резервы несущей способности. На рис. 4.45 показаны изополя изгибающих моментов для сплошной плиты и плиты с отверстиями. Для чистоты эксперимента по контуру отверстия приложена полосовая равномерно распределенная нагрузка, компенсирующая изъятую нагрузку по площади плиты. Сравнивая НДС обеих плит можно констатировать, что отверстия, как и ожидалось, делают плиту несколько более податливой.

* Программные комплексы ЛИРА и МОНОМАХ предоставляют возможность компьютерного моделирования процесса возведения, эксплуатационной стадии, а также расчета плиты одновременно на местную нагрузку и неравномерную осадку опор.

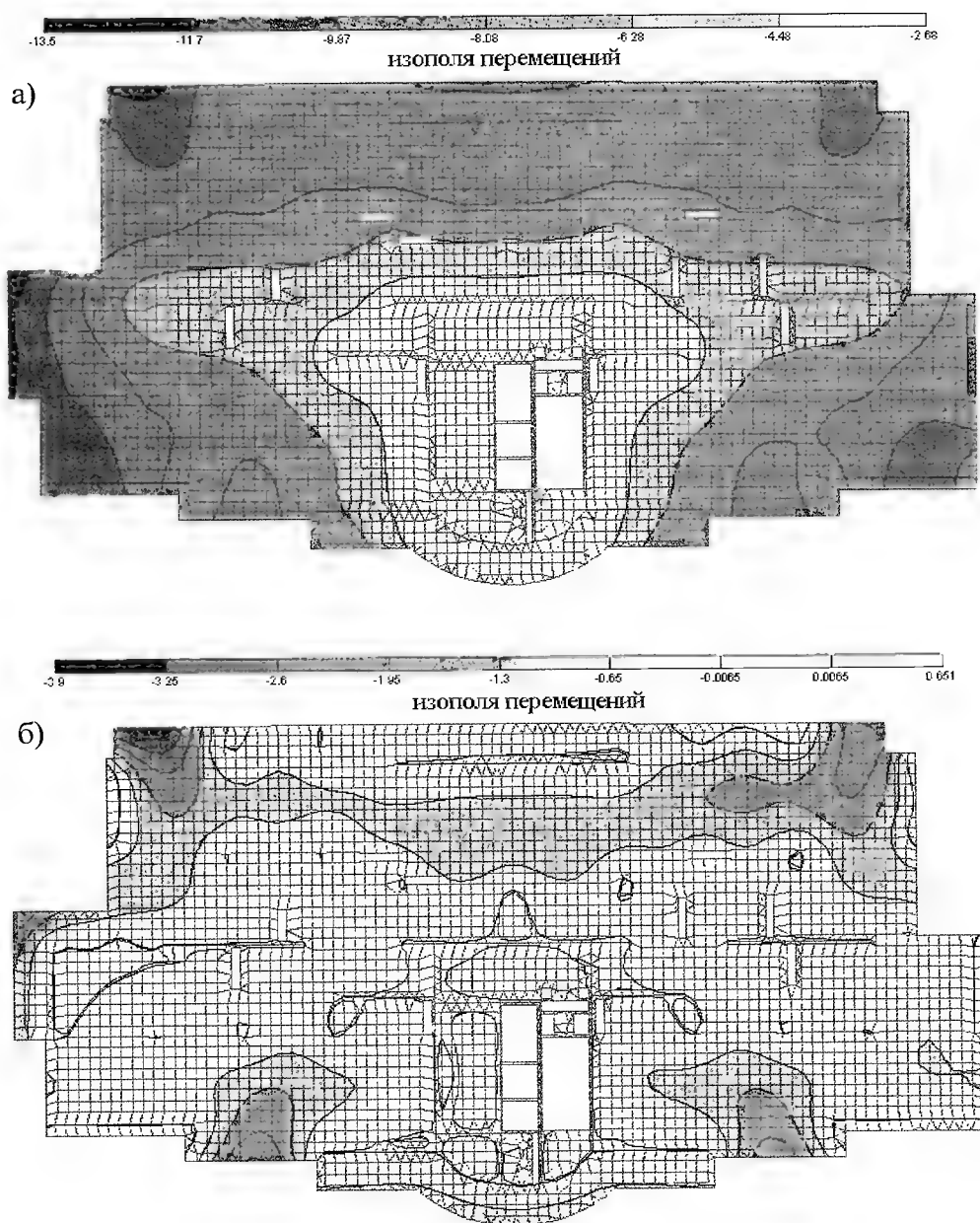
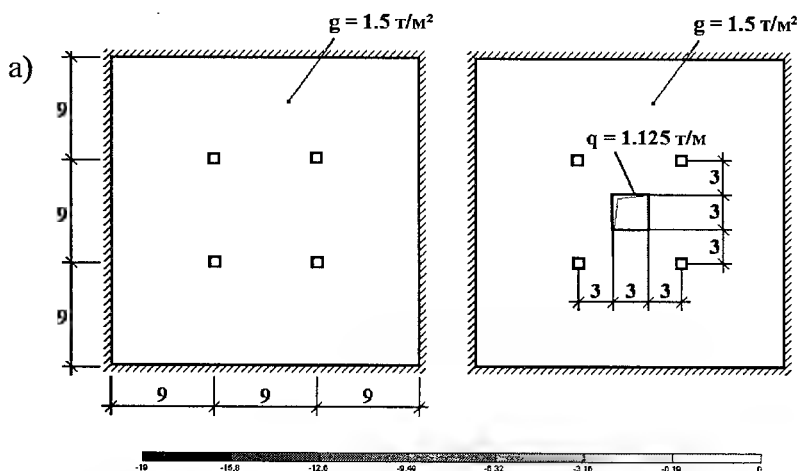


Рис. 4.44

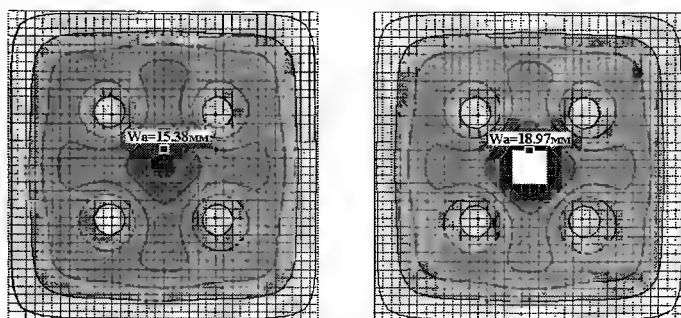
Что же касается пролетных изгибающих моментов, то во второй схеме они значительно меньше (это может вызвать недоумение некоторых специалистов, хотя при осмыслении они убедятся в очевидности этой ситуации). Это явление объясняется следующим образом: произошло изменение схемы плиты – в случае с отверстиями работа плиты приблизилась к консольной схеме, об этом свидетельствует увеличение опорных моментов над колоннами в районе отверстия.

На основании такого маленького исследования можно сделать вывод: отверстия делают плиту более податливой; опорные моменты в районе отверстий несколько увеличиваются; в районе отверстий пролетные моменты уменьшаются и в этом случае арматура, окаймляющая отверстия должна носить только конструктивный характер и не обязательно компенсировать арматуру, изъятую в области отверстия.



б)

изополя перемещений



изополя изгибающих моментов

в)

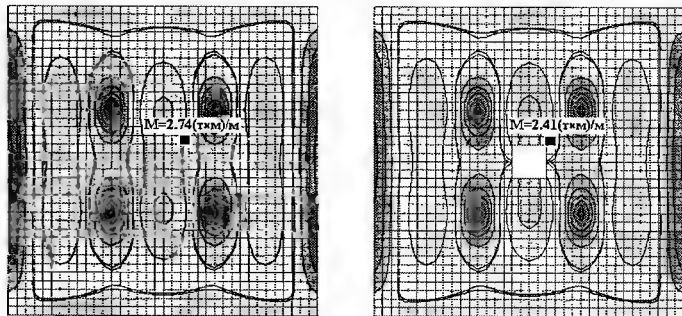


Рис. 4.45

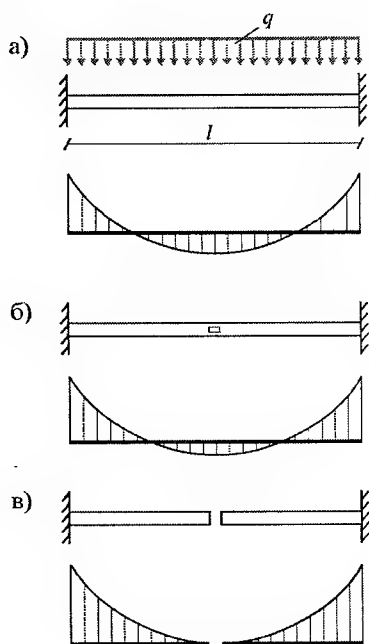


Рис. 4.46

Эта ситуация предельно проясняется на небольшом примере. На рис. 4.46 приведена защемленная балка под равномерно распределенную нагрузку.

На рис. 4.46 а дана эпюра моментов при постоянном сечении балки. В этом

случае $M_{np} = \frac{ql^2}{24}$, $M_{on} = \frac{ql^2}{12}$. На

рис. 4.46 б дана эпюра моментов, когда среднее сечение балки ослаблено

отверстием. В этом случае $M_{np} < \frac{ql^2}{24}$,

$M_{on} > \frac{ql^2}{12}$. На рис. 4.46 в дан предельный

случай, когда балка разделена в середине пролета. В этом предельном случае пролетный момент вообще равен нулю, зато опорные моменты увеличились в 1,5 раза.

Еще один вывод: плита с большим количеством опор различного типа имеет большое количество вариантов «приспособления» к нагрузкам и всегда выбирает наилучший.

Наиболее напряженными местами безбалочных перекрытий являются надпорные зоны колонн и пилонов. Здесь происходит концентрация, как изгибающих моментов, так и перерезывающих сил. Поэтому очень важно правильно оценить напряженно-деформированное состояние этой зоны с тем, чтобы с одной стороны обеспечить необходимую прочность, с другой стороны не допустить излишних запасов, так как неоправданное переармирование этой зоны приведет к трудностям ее бетонирования, плохим сцеплением арматуры с бетоном, а, следовательно, к ослаблению этой зоны.

При расчете и конструировании этих зон можно прибегнуть к следующим рекомендациям.

Изгибающие моменты и поперечные силы определять по грани опор. Для этого можно прибегнуть к достаточно густой конечно-элементной сетке, так что бы размеры конечных элементов были соизмеримы с размерами сечения колонн. В этом случае сечения колонн можно «вписать» в конечно-элементную сетку используя абсолютно-жесткое тело, конфигурация которого соответствует сечению колонны. Существует мнение, что если размеры конечного элемента тонкой плиты соизмеримы с ее толщиной, то необходимо использовать конечные элементы толстой плиты. Это мнение неправильно, так как различные физические соотношения для толстой и тонкой плиты определяются в зависимости от

соотношений толщины плиты к пролету, а конечно-элементная сетка здесь не играет никакой роли.

Часто, особенно при автоматической триангуляции, в опорных зонах образуются вырожденные конечные элементы (треугольные и четырехугольные элементы с большим разбросом размеров сторон). Определенные в них моменты и перерезывающие силы могут иметь значительные выбросы, которые, как правило, не могут быть ориентиром для определения напряженно-деформированного состояния. Особенно это касается перерезывающих сил, точность определения которых в методе конечных элементов в перемещениях значительно ниже точности определения изгибающих моментов. Разрешающей функцией метода конечных элементов является функция перемещений. Изгибающие моменты определяются как вторые производные от перемещений, а перерезывающие силы – как третьи производные. Конечно, каждая последующая производная ухудшает точность определения параметра. В этом случае специалисту лучше ориентироваться на изополя усилий и арматуры, которые сглаживают эти выбросы. В особо ответственных случаях следует прибегнуть к приемам фрагментации и исследовать напряженно-деформированное состояние узла на основе трехмерной модели. В [4.25] эти вопросы рассмотрены более подробно и, кроме рекомендаций по составлению компьютерных моделей, приводятся некоторые рекомендации по конструированию.

Фундаментные плиты.

Очень часто основание фундаментной плиты имеет ярко выраженную неравномерную жесткость, обусловленную наличием карстов, неравномерными свойствами грунтов, повышенной жесткостью грунта и свай в периферийных зонах плиты и другими факторами, существенно влияющими на напряженно-деформированное состояние фундаментной плиты и вышележащих конструкций здания. Но главной особенностью ее работы является возможность обеспечения совместной работы со всеми вышележащими несущими элементами каркаса, а также со свайным или грунтовым основанием. Правильное использование этой возможности позволяет значительно улучшить ее прочностные свойства с одновременным уменьшением материалоемкости.

Для фундаментной плиты это, прежде всего, сказывается на повышении ее жесткости за счет вовлечения в работу вышележащих перекрытий, т.е. фундаментная плита совместно с вышележащими перекрытиями и вертикальными элементами, работающими на сдвиг, образует как бы пространственную ферму Веренделя.

Этот эффект продемонстрирован на нижеследующем текстовом примере.

На рис. 4.47 а приведена расчетная схема тестовой конструкции. Она максимально приближена к характерным жесткостям и нагрузкам примерно 25 этажного здания. Условно вырезана двухметровая полоса, так

непосредственно к фундаментной плите (т.е. не учитывалась совместная работа фундаментной плиты и вышележащих конструкций). Сравнивая напряженно-деформированное состояние конструкции по двум схемам, можно выявить ряд эффектов, обусловленных учетом совместной работы и, безусловно, эти эффекты более правильно отражают работу конструкции по первой расчетной схеме (рис. 4.47 б), так как здесь учитывается большее количество факторов.

Эффект 1: первая схема более жесткая, т.е. в отношении к свайному основанию больше приближается к жесткому штампу. Так отношение величины осадки средней сваи $W_4=13,1\text{ мм}$ к осадке крайней сваи $W_1=12\text{ мм}$ равно 1,09, что меньше такого отношения $13,6:11,8=1,16$ для второго случая. Это приводит к определенной перегрузке крайних свай, имеющих большую жесткость.

Эффект 2: изгибающие моменты в фундаментной плите в первой схеме ($M_4=451,1\text{ тм}$) меньше, чем во второй ($M_4=538,9\text{ тм}$), так как группа мембранных сжимающих усилий в вышележащих перекрытиях и растягивающих в фундаментной плите создает пару, уменьшающую изгибающие моменты в фундаментной плите (эффект пространственной фермы Веренделя). Сами по себе величины мембранных усилий незначительны и мало влияют на напряженно-деформированное состояние плит, но большое плечо этих групп усилий (высоты этажей) делает весьма существенным разгрузочный эффект.

Эффект 3: крайние колонны испытывают изгибающие моменты, обусловленные необходимостью воспринять сдвиговые усилия, чтобы вовлечь в работу плиту перекрытия.

Если говорить об учете ещё большего количества факторов (чем больше факторов мы учитываем, тем мы больше знаем о конструкции, а значит, наши рассуждения и знания о ней будут более адекватными), то необходимо отметить, что, как правило, конструкции умеют приспособляться, т.е. самостоятельно за счет нелинейных деформаций снимать усилия (напряжения) с наиболее нагруженных элементов (областей) и передавать на менее нагруженные.

Этот эффект можно выявить только на основе учета физической нелинейности в работе конструкций.

На рис. 4.48 показана эпюра моментов и нормальных усилий, полученная на основе учета нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями для бетона и арматуры, и между усилиями и вертикальными перемещениями для свай. Если сравнить напряженно-деформированное состояние, показанное на рис. 4.48, то можно проследить значительное выравнивание усилий. Отношение максимального усилия ($N_1=196,4\text{ т}$) в свае № 1 к минимальному ($N_3=145,1\text{ т}$) в свае № 3 равно 1,35, что значительно меньше такого же отношения для первой схемы (рис. 4.47 б) – $241,2:128,4=1,88$. Резко снизился и максимальный момент в плите ($M_4=353,0\text{ тм}$), т.е. в 1,3 раза по сравнению с первой схемой

(рис. 4.47 б) и более чем в 1,5 раза по сравнению со второй схемой (рис. 4.47 в), примерно в 2 раза снизились моменты и в плитах перекрытий. Несколько возросли усилия в крайних колоннах, это говорит о том, что система «приспосабливаясь» самостоятельно старается использовать все выгоды совместной работы фундаментной плиты с вышележащими конструкциями. Нежелательный эффект увеличения моментов в крайних колоннах, как указывалось в ранее, можно уменьшить за счет снижения их жесткости (например, располагать пилоны так, чтобы их больший размер был ориентирован вдоль наружного контура плиты) и передачи основных сдвиговых усилий на диафрагмы. Кстати, нелинейный расчет может показать, что конструкция «приспосабливаясь» будет перераспределять сдвиговые усилия с менее жестких колонн на более жесткие диафрагмы. Вместе с тем, в ряде случаев для снижения усилий в сваях находящихся в периферийных зонах необходимы конструктивные меры.

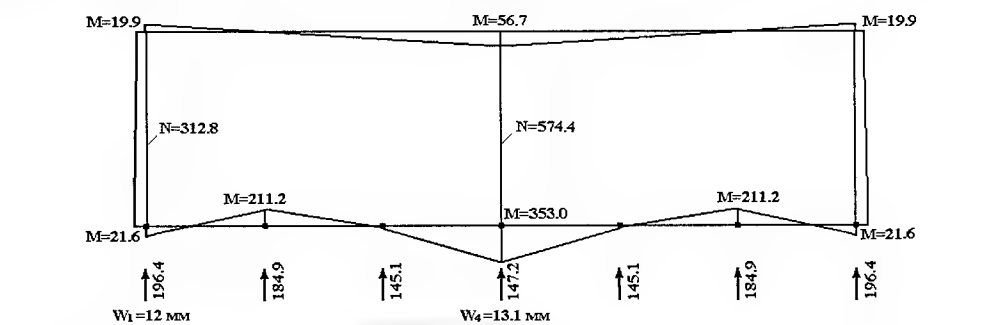


Рис. 4.48

Здесь возможно несколько подходов. Например, можно снять усилия в периферийных сваях, разлив фундаментную плиту и установив ряд дополнительных свай (рис. 4.49 а). Можно использовать и другой подход, основанный на совершенно противоположной идее — поставить дополнительные сваи в центре конструкции, т.е. усилить опорную зону в зоне больших нагрузок (рис. 4.49 б). Нагрузка, жесткости и геометрия в обоих примерах приведенных на рис. 4.49 аналогичны конструкции на рис. 4.47 а.

Как видим, первый подход как будто бы, и достигает нужного эффекта (усилия в периферийных сваях снижены), но это дается дорогой ценой: необходимо увеличить размеры плиты, поставить большое количество дополнительных свай, но самый главный недостаток этого подхода — это резкое увеличение изгибающих моментов (в фундаментной плите — почти в 1,5 раза, в плитах перекрытий — более чем в 2,5 раза, в крайних колоннах — более чем в 5 раз. Сравнение производится со схемой 4.47 б). Алогизм этого подхода очевиден: зона больших нагрузок находится в центре плиты (как правило, ядро жесткости, а следовательно, и большая часть нагрузок располагается в центре здания), а увеличение опорных зон организуется в периферийных зонах. Второй подход наоборот оказывается

достаточно целесообразным. Ценой установки всего одной сваи достигнуто по сравнению со схемой 4.47 б некоторое уменьшение моментов в плитах и значительное (более чем в 2 раза) уменьшение моментов в крайних колоннах.

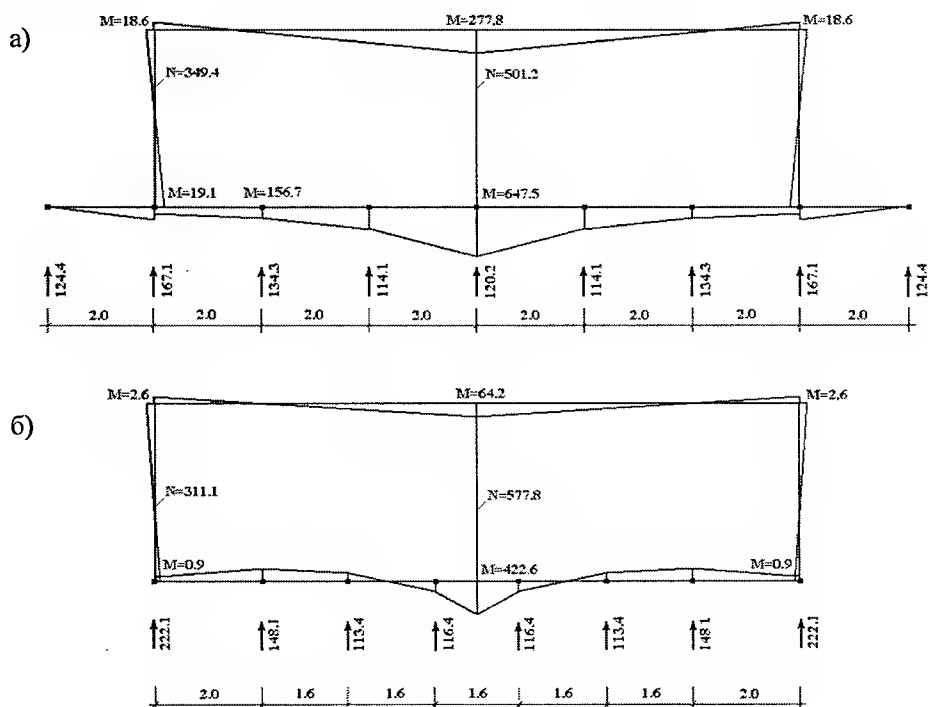


Рис. 4.49

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

- Конструктивные мероприятия по уменьшению усилий в периферийных сваях, связанные с увеличением количества свай в периферийных зонах и в связи с этим увеличением размеров плит нелогичны и вредоносны для конструкций здания, так как ведут к значительному перерасходу материала (большее количество свай, большие размеры фундаментной плиты, повышенное армирование в фундаментной плите, плитах перекрытий и крайних вертикальных элементах).
- В случае, если конструктор принял решение о необходимости конструктивных мероприятий по уменьшению усилий в периферийных сваях, плите и крайних колоннах, то логичным является увеличение количества свай непосредственно под зоной больших нагрузок. Возможны и другие конструктивные мероприятия с целью уменьшения моментов в крайних колоннах. Например, пилоны в периферийной зоне, как уже указывалось выше, следует расположить так, чтобы большая полка была ориентирована вдоль контура. В этом случае уменьшение моментов в этих пилонах будет достигнуто за счет уменьшения их

жесткости, а сдвиговые усилия, обеспечивающие эффект пространственной ферма Веренделя будут восприняты диафрагмами.

Прежде чем принимать решение об увеличении количества свай, желательно все же провести расчет общей схемы здания совместно с грунтовым или свайным основанием в физически нелинейной постановке. Опыт таких численных исследований показывает, что весьма оправдан инженерный опыт расстановки свай состоящий в следующем: количество свай определяется путем деления общего веса здания на величину несущей способности свай. Определенной таким образом количество свай увеличивается на 20–25%, чтобы компенсировать различные неравномерности, влияние ветровой нагрузки и т.п. Сваи расставляются равномерно, но если есть возможность, шаг их расстановки следует сгущать непосредственно под вертикальными элементами, особенно под ядром жесткости. В этом случае создаются возможности для резервов, приспособляемости конструкции, а она «использует их рационально».

Моделирование приспособляемости конструкции препятствующей прогрессирующему разрушению.

Возможно, не очень удачный заголовок этого подраздела вместе с тем в определенной мере характеризует суть проблемы: как запроектировать конструктивную схему такой, что бы при внезапном удалении наиболее ответственных элементов не допускалось прогрессирующее разрушение. При этом дополнительные материалозатраты должны быть сведены к минимуму. Возможно также допущение, что конструкция частично может потерять эксплуатационные качества (недопустимые для эксплуатации прогибы, отверстия и т.п.).

Определение наиболее ответственных элементов является отдельной темой, хотя для высотных зданий, как правило, это наиболее нагруженные колонны нижних этажей. Продвинутые программные комплексы должны обеспечивать режим, на основе которого можно в автоматизированном режиме исследовать большое количество возможных вариантов и принять ряд конструктивных мер с тем, чтобы, рационально используя минимальные дополнительные материалозатраты, «помочь» конструкции приспособиться к неожиданно возникшей ситуации и не допустить прогрессирующего разрушения.

Приведем пример возможного проектного решения, основывающегося на вышеприведенных рассуждениях.

На рис. 4.50 приведен несложный план здания высотой 25 этажей. При нагрузке $1,2 \text{ т/м}^2$ усилие в одной из наиболее нагруженных колонн – средней колонне первого этажа достигает 1110 т. при внезапном удалении этой колонны конструктивная схема здания меняется (рис. 4.51): средние вышележащие колонны уже не являются опорами и «зависают» на всех оставшихся перекрытиях, перекрытия в средней части уже работают

пролетом 12×12 м и если не применить определенных конструктивных мер может произойти обрушение всей конструкции.

При рассмотрении новой схемы можно отметить, что все перекрытия над удаленной колонной получают большие прогибы и могут, изменив схему работы за счет мембранных усилий, приспособиться к новой ситуации.

Изополя главных мембранных напряжений для нижнего перекрытия находящиеся в наиболее неблагоприятной ситуации представлены на рис. 4.52. На этом рисунке видно, что средняя часть перекрытия размером 12×12 м работает как мембрана (большие главные растягивающие напряжения), а в окаймляющей зоне этой мембраны выделилась сжатая зона (своеобразный сжатый бортовой элемент). На этом же рисунке обозначено направление возникновения трещин. Для обеспечения такой приспособляемости в проектных решениях необходимо предусмотреть непрерывность верхней и нижней арматуры по всей области плиты (часто нижняя арматура в районе колонн обрывается или не стыкуется). В данном конкретном примере фоновая верхняя и нижняя арматура $\varnothing 16$ с шагом 100×100 мм обеспечивает восприятие мембранных усилий. Увеличение усилий в близлежащих колоннах находится в рамках допустимых перегрузок при особых воздействиях. Несомненно, большой прогиб центра перекрытий – 0,5 м и недопустимые величины трещин нарушают эксплуатационные качества сооружения, но прогрессирующего разрушения не произошло. Конечно, для исследования подобного ряда ситуаций необходимо, чтобы программные комплексы, реализующие расчет по изменяющимся расчетным схемам, допускали возможность учета физической и геометрической нелинейности* (основные факторы, обуславливающие приспособляемость конструкции).

Этот пример показывает, как за счет применения определенных конструктивных мер, не влекущих практически дополнительные материалозатраты, можно в ряде случаев воспрепятствовать прогрессирующему разрушению. Конечно, этот, как и всякий демонстрационный пример содержит много допущений и упрощений (например, не учитывается динамика внезапного удаления элемента) однако в полной мере показывает возможность устранения причин прогрессирующего разрушения без особых дополнительных материалозатрат.

* ПК ЛИРА и специализированный процессор МОНТАЖ+ учитывает эти факторы одновременно и в автоматическом режиме позволяет организовать последовательное изъятие наиболее ответственных элементов с просмотром и анализом схем приспособляемости конструкции.

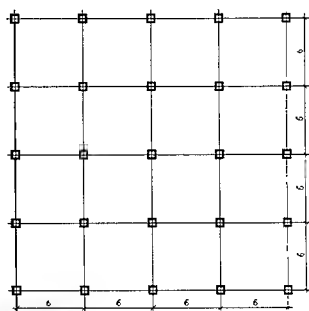


Рис. 4.50

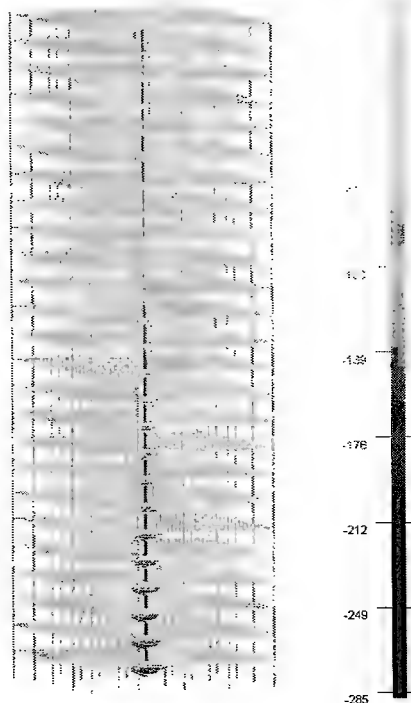
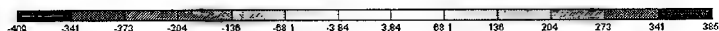


Рис. 4.51



Нелинейное
загружение

Картина разрушения

Верхний слой

Изополя главных
напряжений N_1

Единицы измерения –
 t/m^2

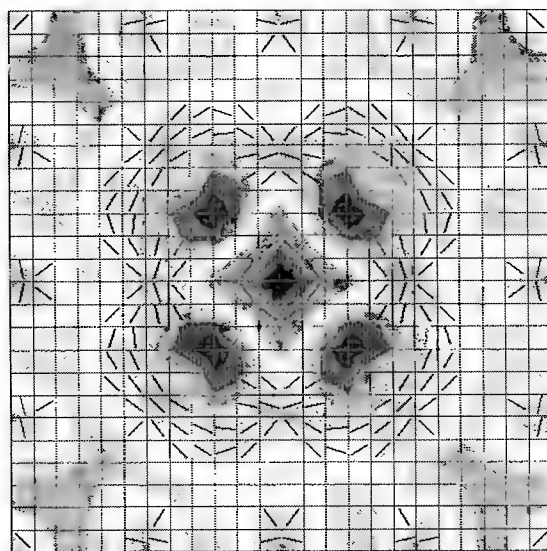


Рис. 4.52

Материал этого раздела помимо основной цели – дать рекомендации по построению компьютерных моделей этого класса конструкций преследовал еще две: с одной стороны исследовать основные конструктивные особенности, с другой стороны – привести примеры исследования конструкций на основе многочисленных компьютерных

моделей, каждая из которых призвана ответить на те или иные вопросы заранее поставленные инженером. В работе [4.25] всем этим вопросам, равно как и некоторым рекомендациям по конструированию уделяется большое внимание.

4.12 Моделирование процесса возведения.

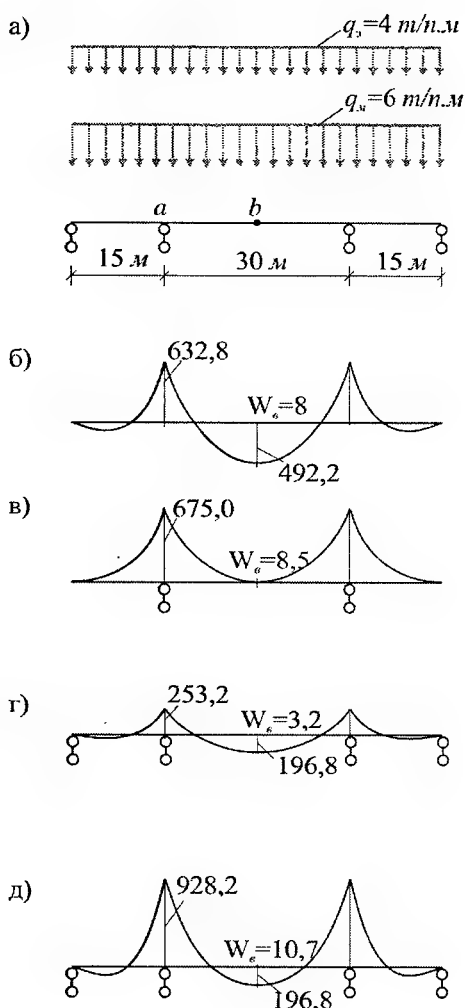


Рис. 4.53

Если балка возводится методом навешивания (метод иногда применяется в практике мостостроения), т.е. на средние опоры симметрично навешиваются пролетные элементы, то перед замыканием среднего пролета и опиранием на крайние опоры эпюра моментов и прогиб в середине (от $q_m = 6 \text{ т/н.м}$) будут иметь вид, представленный на рис. 4.53 в. Возведенная таким образом конструкция будет работать как трехпролетная балка только на эксплуатационную нагрузку $q_3 = 4 \text{ т/н.м}$. Действительная

Для современных сложных сооружений (мосты, балки, большепролетные покрытия, высотные здания и др.), как правило, конструктивная схема обуславливается не только эксплуатационной стадией, но и стадией возведения. В процессе возведения конструктивная схема сооружения может многократно изменяться, усилия и перемещения «замораживаться», определяя сечения элементов и конструкции узлов именно на этой стадии.

Классический пример влияния стадии нагружения на НДС эксплуатационной стадии приведена на рис. 4.53.

На трехпролетную балку с жесткостью $EI = 4.5 \cdot 10^5 \text{ тн.м}^2$ приложена монтажная ($q_m = 6 \text{ т/н.м}$) и эксплуатационная ($q_3 = 4 \text{ т/н.м}$) нагрузки.

Эпюра моментов и величина прогиба в середине среднего пролета в случае если все нагрузки $q_{\text{общ}} = q_3 + q_m = 10 \text{ т/н.м}$ приложена на окончательную (эксплуатационная стадия) схему представлена на рис. 4.53 б.

эпюра моментов представляющая собой суммарную эпюру от монтажной нагрузки для консольной схемы (рис. 4.53 в) и эксплуатационной нагрузки для пролетной балки (рис. 4.53 г) будет иметь вид представленный на рис. 4.53 д. Как видно, эта эпюра сильно отличается от эпюры рис. 4.53 б, полученной без учета влияния способа возведения конструкции: опорные моменты в 1,5 (928,2 против 632,8) раза больше, а прогиб в середине в 1,3 (10,7 против 8,0 см) больше.

Моделирование процесса возведения приобретает важное значение для конструкций высотных зданий из монолитного железобетона, так как изготовление монолитных конструкций связано с установкой временных стоек, которые существенно изменяют конструктивную схему здания на этапах возведения.

Характерная организация компьютерного моделирования процесса возведения конструкций высотных зданий реализована в специализированном процессоре МОНТАЖ+ в составе ПК ЛИРА.

В этом процессоре кроме учета изменяющейся конструктивной схемы собственно несущих конструкций учитываются процессы снятия и установки стоек опалубки, приложения и снятия монтажных нагрузок, возможной временной пониженной прочности и жесткости бетона, обусловленной временным недобором 28-дневной прочности бетонной смеси или ее временным замерзанием.

Вначале задается конструктивная схема всего объекта, т.е. описываются все элементы, включая как основные несущие элементы объекта (колонны, балки, плиты, диафрагмы), так и временные элементы (элементы опалубки, стойки подмостей и др.). Затем для каждого этапа возведения описываются все конструктивные элементы, которые возведены на момент данного этапа, временные стойки подмостей, которые присутствуют на данном этапе, а также стойки подмостей, которые демонтируются на данном этапе. Для каждого этапа задаются нагрузки (собственный вес, монтажные нагрузки), которые действуют на данном этапе, а при необходимости понижающий коэффициент прочности бетона.

Исходные данные для последнего этапа соответствуют эксплуатационной стадии объекта, т.е. стадия, когда объект полностью возведен, убраны временные опоры (стойки подмостей), набрана эксплуатационная прочность бетона, действуют эксплуатационные нагрузки (собственный вес, ветер, снег, полезные нагрузки).

На каждом этапе возведения объекта происходит расчет соответствующей конструктивной схемы на собственный вес и монтажные нагрузки с учетом имеющихся, снятых или добавленных временных опор.

Схематически организация компьютерного моделирования процесса возведения однопролетной трехэтажной рамы представлена на рис. 4.54.

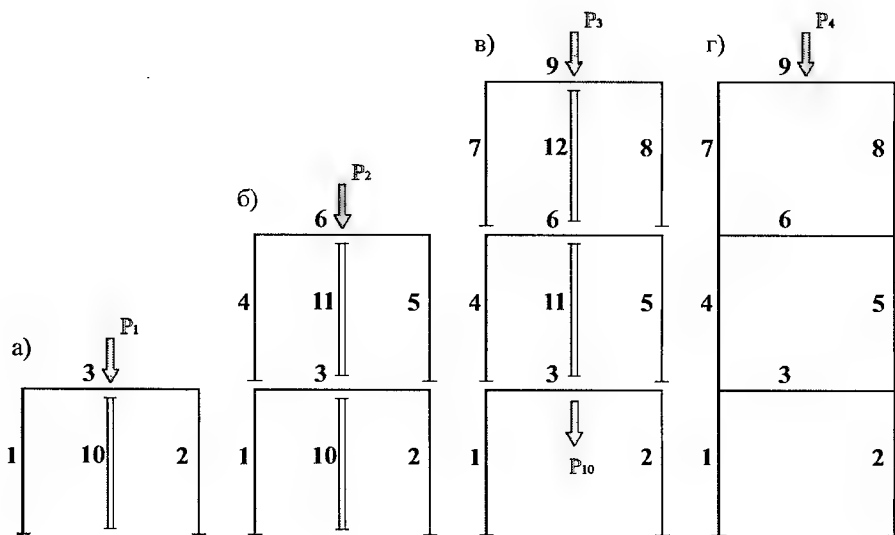


Рис. 4.54

Первая стадия монтажа – рис. 4.54 а

Смонтированы элементы первого этажа 1, 2, 3 и стойка опалубки – 10. Обобщенная нагрузка P_1 – собственный вес смонтированных конструкций + монтажная нагрузка, соответствующая этому этапу возведения. В результате расчета кроме всех параметров НДС определяется арматура в сечении элементов 1, 2, 3 с учетом пониженной прочности бетона, например $K_1=0.3$.

Вторая стадия монтажа – рис. 4.54 б

Кроме элементов первого этажа дополнительно возведены элементы второго этажа 4, 5, 6 и установлена дополнительная временная стойка 11. Нагрузка P_2 – собственный вес вновь возведенных конструкций + монтажная нагрузка на этом этаже. Усилия в элементах соответствующие нагрузке P_2 суммируются с зафиксированными усилиями в элементах присутствовавших на этапе 1 от нагрузки P_1 . По найденным усилиям определяется арматура во всех элементах 1, 2, 3, 4, 5, 6 с учетом неполной прочности бетона, которая может быть разной для разных элементов. Например, для возведенных на втором этапе (элементы 4, 5, 6) $K_2=0.3$, а для возведенных на первом этапе (элементы 1, 2, 3), например $K_1=0.6$.

Третья стадия монтажа – рис. 4.54 в.

Кроме элементов первых двух этажей 1, 2, 3, 4, 5, 6 возведены элементы третьего этажа 7, 8, 9, установлена дополнительная временная стойка 12, временная стойка 11 оставлена, а временная стойка 10 удалена. Нагрузка P_3 – собственный вес вновь возведенных конструкций + монтажная нагрузка на этом этапе. Удаление временной стойки моделируется приложением силы P_{10} равной усилию в убранной стойке.

Накопление усилий в элементах на этом этапе аналогично второму этапу, т.е. для ранее возведенных элементов 1– 6, происходит

суммирование зафиксированных усилий на предыдущем втором этапе со вновь полученными усилиями на третьем этапе.

По найденным усилиям определяется арматура во всех элементах 1–9 с учетом пониженной прочности бетона на этом этапе, например, $K_3=0.3$, $K_2=0.6$, $K_1=0.8$.

Эксплуатационная стадия – рис. 4.54 г.

На этой стадии расчетная схема соответствует проектной. Процедура удаления всех временных стоек выполняется аналогично удалению стойки 10 на третьем этапе. Обобщенная нагрузка P_4 включает все полезные нагрузки и дополнительные постоянные нагрузки, за исключением нагрузок от собственного веса, включенных в нагрузки P_1 , P_2 , P_3 , усилия от которых зафиксированы на предыдущих этапах расчета.

Прочность бетона на этой стадии может приниматься в соответствии с классом бетона или быть несколько заниженной, т.к. замораживание бетонной смеси в процессе монтажа может снизить окончательную прочность бетона.

В заключение этого раздела приведем пример компьютерного моделирования процесса возведения большепролетной (200 м×110 м) мембраны (рис. 4.55).

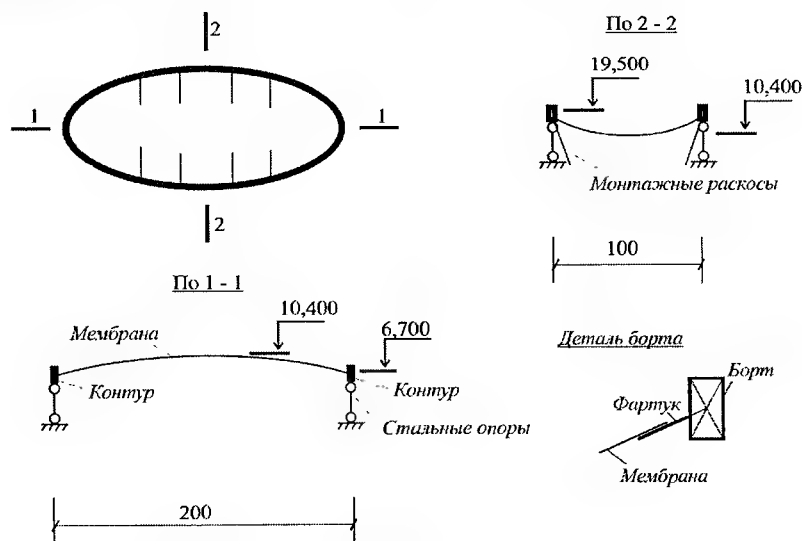


Рис. 4.55

Стальная мембрана толщиной 6 мм опирается на железобетонный бортовой элемент прямоугольного сечения, окаймленный стальным коробом, который в дальнейшем постадийно заполняется железобетоном. По контуру борт опирается на шарнирные опоры из стальных труб. Для придания большей жесткости бортовой элемент стягивается канатами, лежащими на мембране и расположенными вдоль длинной стороны мембраны.

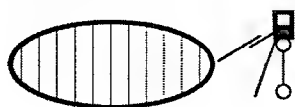
Компьютерное моделирование было проведено по ПК ЛИРА и включало следующие стадии:

1 стадия.



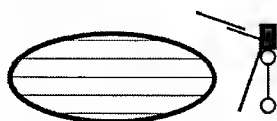
Монтируются колонны, коробка борта, фартук, раскосы. Расчет выполняется в линейно-упругой стадии на собственный вес установленных элементов.

2 стадия.



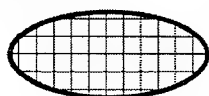
Монтируется поперечная постель, замоноличивается первый слой борта. Стальные полосы постели моделируются геометрически нелинейным растянутым стержнем. Бортовые элементы моделируются физически нелинейным сжато-изогнутым стержнем. Учитывается значительное кручение бортового элемента из-за ванного усилия ями от навешиваемой постели. Расчет выполняется шаговым методом в физически и геометрически нелинейной постановке. Дополнительная нагрузка – собственный вес постели и замоноличенной части бортового элемента.

3 стадия.



Монтируется продольная постель, полностью замоноличивается бортовой элемент. Схема расчета аналогична стадии 2.

4 стадия.



Монтируется мембрана.

Мембрана моделируется четырехугольными и треугольными геометрически нелинейными конечными элементами мембраны. Расчет выполняется в физически и геометрически нелинейной постановке. Дополнительная нагрузка – собственный вес мембраны.

5 стадия.



Монтируются и преднапрягаются уложенные поверх мембраны канаты. Расчет выполняется в физически и геометрически нелинейной постановке. Нагрузка – собственный вес канатов и усилия преднапряжения. Преднапряжение моделируется специальным элементом – «форкопф». Учитывается проскальзывание канатов в узлах опирания на мембрану.

6 стадия.

Демонтируются откосы. Расчет выполняется в физически и геометрически нелинейной постановке на нагрузку, соответствующую усилиям в демонтируемых раскосах.

Дальнейший расчет на расчетные сочетания эксплуатационных нагрузок (снег, ветер, собственный вес кровли) выполняются не с «нулевого» НДС смонтированной конструкции, а с НДС соответствующего последней (шестой) стадии монтажа.

4.13 Моделирование процесса нагружения.

Решая физически нелинейные задачи шаговым методом, который часто идентифицируют как метод последовательных нагружений, по сути, можно организовать моделирование процесса нагружения. Действительно в этом случае нагрузка прикладывается частями, а на каждом шаге изменяются жесткостные характеристики системы.

С позиций инженеров, проектирующих строительные конструкции, наибольший интерес вызывает учет физической нелинейности при расчете железобетонных конструкций. Это, по-видимому, объясняется тем, что с одной стороны это наиболее распространенный тип конструкций, с другой стороны, нелинейная зависимость между напряжениями и перемещениями проявляется уже на ранних стадиях нагружения.

Широко известен факт, что для железобетонных изгибаемых плит и балок прогиб при эксплуатационной нагрузке в 3–4 раза превышает полученный из линейно-упругого расчета. Поэтому приведенные ниже несколько примеров математического моделирования процесса нагружения (расчеты проводились по ПК ЛИРА) даны для железобетонных конструкций.

Сначала рассмотрим простейшую конструкцию – однопролетную защемленную по концам балку под равномерно-распределенную нагрузку.

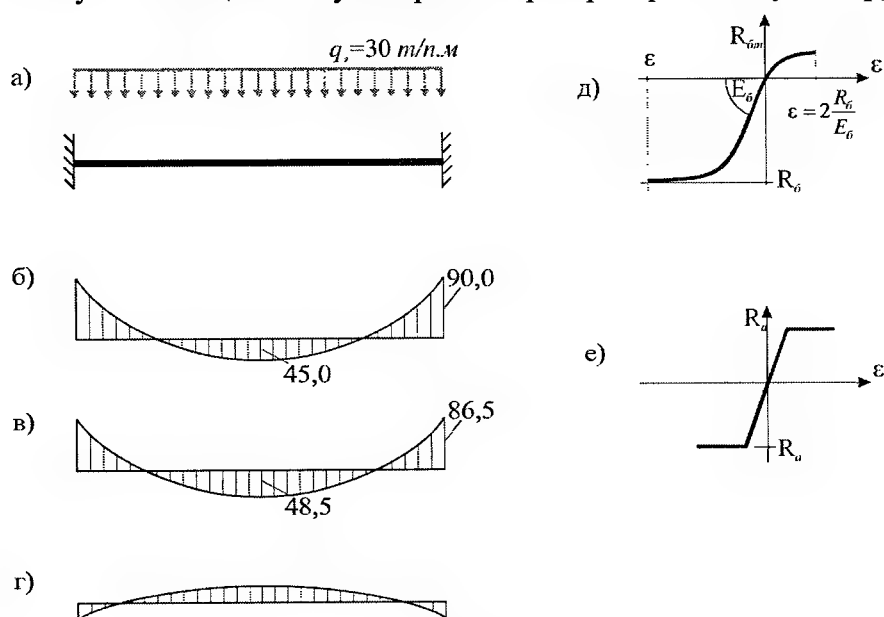


Рис. 4.56

Конструктивные характеристики рассматриваемой балки следующие:

- сечение прямоугольное, высота $h=80$ см, ширина $b=40$ см;
- пролет балки – 6 м;
- балка в средней части длиной – $0,6l$; имеет нижнее армирование $F_{ан}=20$ см², на крайних участках длиной по $0,3l$ имеет верхнее армирование $F_{ав}=20$ см². Арматура класса АIII с $R_a=3500$ кг/см², $E_a=2 \cdot 10^7$;
- материал балки – бетон класса В 30 с $R_b=170$ кг/см², $R_{bt}=12,0$ кг/см², $E_b=3 \cdot 10^6$.
- Принятые зависимости между напряжениями и деформациями для бетона приведены на рис. 4.56, для арматуры – на рис. 4.56 е.

Расчет выполняется шаговым методом, на каждом шаге нагрузка наращивалась на величину $q=1$ м/н.м.

В табл. 4.4 приведены основные параметры напряженно-деформированного состояния конструкции: опорные ($M_{оп}$), пролетные ($M_{пр}$) моменты, нормальная сила (N) в опорных сечениях и прогиб в середине пролета.

Табл. 4.4

Параметры НДС	Упругий расчет $q=30$ м/н.м	Нелинейный расчет при q м/н.м				
		20	30	40	50	61,5
$M_{оп}$ (тм)	-90,0	-58,0	-86,5	-114,0	-131,2	131,2
$M_{пр}$ (тм)	45,0	32,0	48,5	66,0	93,8	145,5
N (т)	0	-42,5	-72,0	-105,5	-144,7	-228,4
Δ (см)	1,5	1,9	3,0	4,3	7,3	27,7

Анализируя эту таблицу можно отметить следующие эффекты:

- При нагрузке $q=30$ м/н.м (близкой к эксплуатационной) параметры НДС при упругом расчете (графа 2, эпюра моментов на рис. 4.56 б) отличаются от параметров НДС, полученных по нелинейному расчету при той же нагрузке (графа 4, эпюра моментов на рис. 4.56 в). произошло выравнивание пролетного и опорных моментов, прогиб увеличился в 2 раза.
- Нелинейный расчет показывает появление нормальной сжимающей силы (факт известный из экспериментальной практики железобетона), что объясняется изменением конструктивной схемы – нейтральная ось в середине пролета смещенная вверх, а у опор – вниз (рис. 4.56 г) и балка начинает работать не только как изгибный элемент, а и как своеобразная арка.

Таким образом, на основе проведения своеобразного компьютерного моделирования процесса нагружения получена следующая информация.

Вначале балка работает как линейно упругая, затем появляются трещины у опор, затем появляются трещины в пролете, прогибы нелинейно нарастают, конструкция меняет свою расчетную схему приспособляясь к увеличенной нагрузке (бетон хорошо работает на сжатие, поэтому конструкция находит дополнительные резервы в виде дополнительной конструктивной схемы сжатой арки, а также за счет увеличения предельного момента и за счет наличия сжимающей силы). При нагрузке близкой к 50 т/м в опорных сечениях балки образуются пластические шарниры, однако она продолжает работать как шарнирно опертая балка + арка за счет того, что несущая способность пролетных сечений еще не исчерпана. При нагрузке близкой к 62 т/м в пролетных сечениях балки образуются пластические шарниры, конструкция превращается в механизм, перемещение неограниченно нарастает, что может свидетельствовать о разрушении конструкции.

Даже по такому простому примеру можно судить насколько убогой выглядит информация, полученная на основе линейно-упругого расчета (по сути, она ограничивается только знанием об эпюре моментов – рис. 4.52 б) по сравнению с информацией, полученной на основе компьютерного моделирования процесса нагружения в физически нелинейной постановке.

Для пластинчатых железобетонных конструкций моделирование процесса нагружения связано с учетом начальной ортотропии обусловленной расположением арматуры и дальнейшей анизотропии, обусловленной появлением трещин. Основные принципы построения матриц жесткости конечных элементов для железобетонных пластинчатых конструкций изложены в работах [4.19, 4.20, 4.21].

Рассмотрим расчет трехпролетной железобетонной балки-стенки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, которая приложена к верхней грани (подробные сведения о материале конструкции, методике эксперимента и его результатах приведены в работе [4.22]).

Экспериментальное нагружение производилось ступенями по 4 тс/м . После приложения очередной порции нагрузке давалась выдержка 5 – 6 мин, затем снимались отсчеты, фиксировались трещины, и замерялась ширина их раскрытия. Нагружение продолжалось до разрушения конструкции. Испытания проводились на большой партии образцов-близнецов. Таким образом, в процессе испытания были получены данные о последовательности появления трещин, развитии деформации, картине разрушения.

Балка-стенка рассчитывалась методом последовательных нагружений по дискретной расчетной схеме с прямоугольной сеткой. Шаги нагружения были приняты неравномерными (2 тс/м , 1 тс/м , $0,5 \text{ тс/м}$) со сгущением в момент появления и стабилизации основных трещин.

После каждого шага нагружения о каждом элементе выдавалась следующая информация: нагружения в бетоне и в арматуре; наличие одной или двух трещин и углы их наклона к основным осям, признак

выкалывания бетона из плоскости конструкции. Для математической интерпретации этого состояния использованы рекомендации работы [4.24].

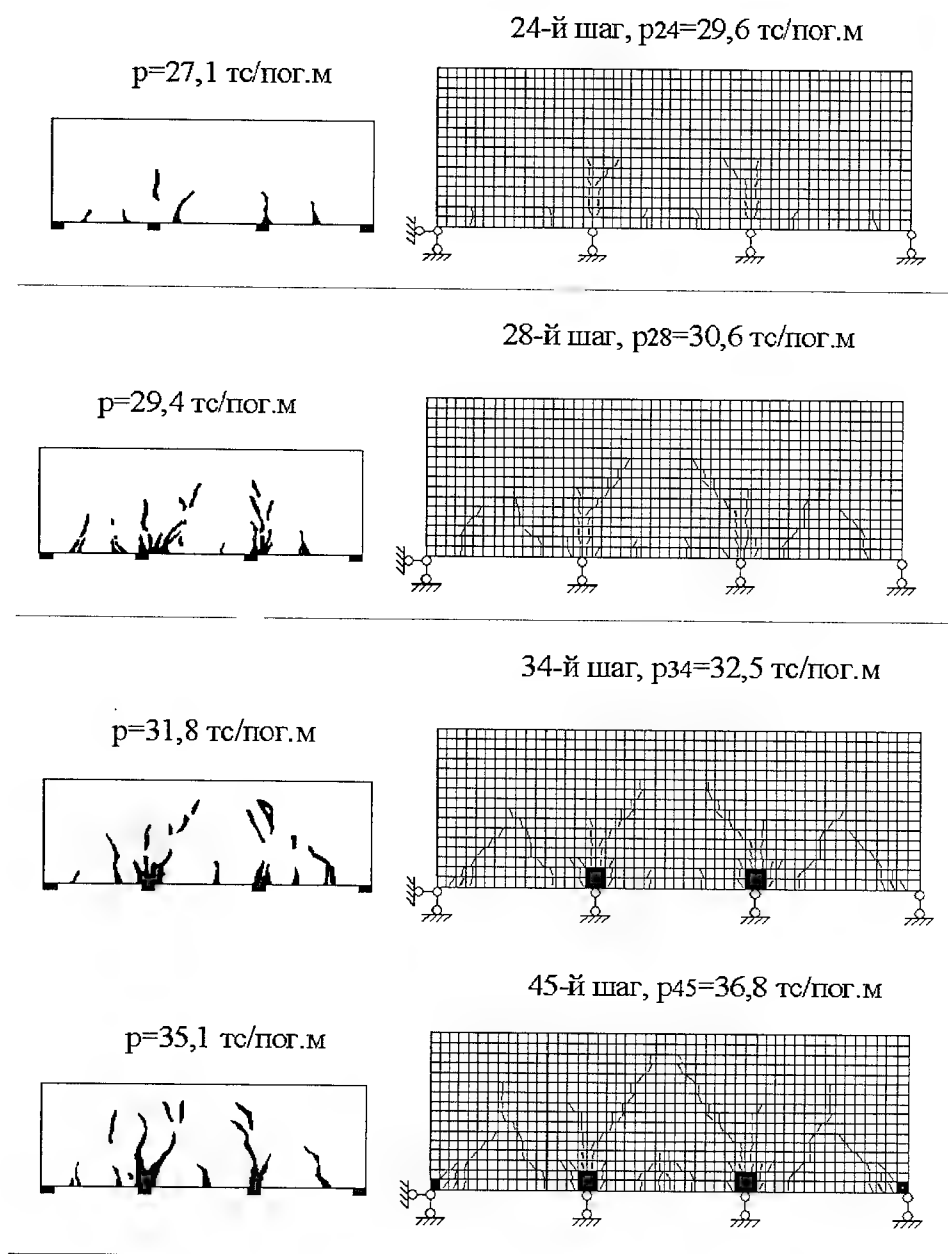


Рис. 4.57

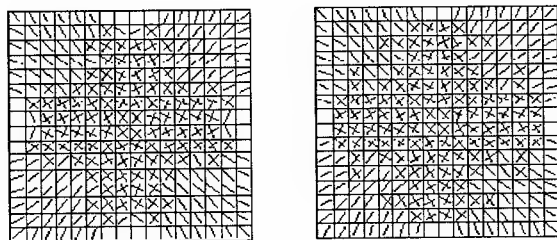
Основные этапы возникновения и развития трещин, полученные на основе математического компьютерного моделирования, представлены в правой части рис. 4.57. Возникновение трещин в определенном КЭ под данным углом отмечалось тонкой линией. Выкалывание бетона отмечалось затемнением всего КЭ. В левой части рис. 4.57 приведены основные этапы развития и появления трещин, полученные экспериментально. Сравнение

результатов показывает, что качественная картина изменения напряженно-деформированного состояния железобетонной балки-стенки, полученная на основе компьютерного моделирования процесса нагружения, в основном правомерна.

Рассмотрим пример расчета квадратной шарнирно опертой железобетонной плиты под равномерно распределенную нагрузку (экспериментальные данные на этой плите приведены в работе [4.23]). При расчете использовались прямоугольные конечные элементы. Шаги нагружения были приняты неравномерными со сгущением в моменты появления и стабилизации трещин, а также появления линий излома. По данным эксперимента первые изломы в плите были обнаружены при нагрузке $0,48 \text{ кгс/см}^2$, а разрушение плиты произошло при нагрузке $0,62 \text{ кгс/см}^2$.

На рис. 4.58 приведен характер появления и развития линий изломов в плите с увеличением нагрузки на нижней поверхности плиты, полученный в результате математического моделирования ($p_{25}=0,45 \text{ тс/м}^2$ и $p_{30}=0,56 \text{ тс/м}^2$) и на основе эксперимента ($p=0,62 \text{ тс/м}^2$). Сравнивая эти данные, можно сделать вывод о хорошем согласовании моментов появления первых изломов, величины разрушающей нагрузки и общей картины трещин, что в определенной мере подтверждает правомерность использования рассмотренных методов.

25-й шаг, $p_{25}=0,45 \cdot \text{тс/м}^2$ || 30-й шаг, $p_{30}=0,56 \cdot \text{тс/м}^2$ ||



Разрушение, $p=0,62 \cdot \text{тс/м}^2$ ||

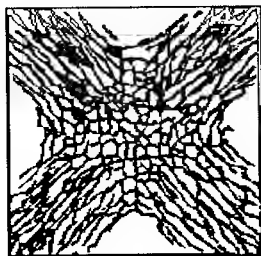


Рис. 4.58

Сочетание МКЭ с методом последовательных нагружений создает благоприятные предпосылки для организации математического моделирования процесса статического нагружения железобетонных

конструкций. Подобно тому, как статическое нагружение соответствует постепенному увеличению нагрузки с постепенным изменением жесткостных характеристик отдельных мест сооружения, так и при расчете методом последовательных нагружений нагрузка прикладывается не сразу, а постепенно, отдельными «порциями». При этом на каждом этапе расчета учитывается изменение жесткостных характеристик в каждом отдельном месте сооружения (для каждого конечного элемента). Такой расчет, как и действительное нагружение, начинается с ненагруженного состояния, когда нагрузка и перемещение равны нулю, и может закончиться для любой наперед заданной нагрузки. Это дает возможность проследить поведение рассчитываемой системы на всем протяжении нагружения, начиная от небольшой нагрузки, когда система еще работает в упругой стадии, включая состояние, когда появляются первые трещины в растянутых и развиваются нелинейные деформации бетона в сжатых зонах, и кончая стадией, предшествующей разрушению конструкции.

Таким образом, помимо основной задачи такого расчета, получения действительной картины напряженного состояния железобетонной конструкции при заданной нагрузке, этот расчет дает возможность выявить величину нагрузки, когда трещины или деформации в каком-либо месте сооружения достигли недопустимого размера, т.е. производить расчет по второму и третьему предельным состояниям.

Если продолжить расчет, неограниченно увеличивая нагрузку, то это будет возможно до тех пор, пока стадия напряженно-деформированного состояния не окажется настолько близко к предельной, что математическая модель потеряет смысл. В этом случае диагональные члены общей матрицы жесткости на последнем этапе нагружения станут настолько малы, что обусловят неограниченный рост перемещений, т.е. признак разрушения конструкции.

Приведенные примеры показывают, что нагрузка, полученная на последнем этапе нагружения, достаточно близка к предельной. Эти примеры выполнены для довольно простых систем, хотя метод конечных элементов дает возможность произвести математическое моделирование для значительно более сложных систем: – плит произвольной формы и с произвольным опиранием с отверстиями, а также комбинированных систем – рамно-связевых каркасов и плит, подпертых ребрами или структурами.

Достаточно перспективна возможность сочетания метода последовательных нагружений с методом последовательных жесткостей. Здесь можно математически моделировать сложный процесс нагружения железобетонных конструкций во времени. Кратковременное приложение нагрузки моделируется методом последовательного нагружения; для моделирования изменений напряженного состояния при длительном действии нагрузки используется метод последовательных жесткостей, который в физическом смысле соответствует изменению состояния, обусловленного изменением жесткостей. При дальнейшем

кратковременном изменении нагрузки опять используется метод последовательных нагружений и т. д.

Используя основные положения изложенной методики компьютерного моделирования железобетонных конструкций можно организовать компьютерное моделирование для конструкций из других материалов (металл, пластмассы, грунт), конечно, если будут известны зависимости между напряжениями (усилиями) и деформациями (перемещениями). Конечно, компьютерное моделирование процесса нагружения в том виде как оно изложено выше связано с введением ряда гипотез и допущений. Это в первую очередь: гипотеза об активном нагружении; перемещение параметров нелинейных зависимостей для одноосного напряженного состояния на зависимости между эквивалентными напряжениями и деформациями; игнорирование наличия в этих зависимостях ниспадающих ветвей, играющих большую роль особенно при моделировании стадий, близких к разрушению; пренебрежение нарушением целостности (принятие расположения трещин настолько частым, чтобы их можно было бы отнести к микромасштабу) и др.

Вместе с тем, можно привести ряд аргументов в пользу возможности применения компьютерного моделирования уже сейчас в рамках имеющегося инструментария:

во-первых, большинство принятых гипотез имеют такой же порядок погрешностей, что и общепринятые допущения, связанные с идеализацией геометрии, нагрузок, физико-механических свойств материала;

во-вторых, ближайшие достижения в области экспериментального изучения физико-механических свойств материала, в области совершенствования математических методов, алгоритмов и программных реализаций, безусловно, будут смягчать ранее принятые допущения, и развивать рамки правомерности компьютерного моделирования процесса нагружения;

в-третьих, то огромное количество интереснейшей и полезнейшей информации, которое представляет интерес у компьютерного моделирования процесса нагружения для размышления о действительной работе конструкции (снятие пиков напряжений и усилий, перераспределение усилий, повышение деформативности, эффекты приспособляемости и мн. др.) просто трудно переоценить и часто вынуждает взглянуть на линейно-упругий расчет, как на анахронизм.

4.14 Компьютерное моделирование жизненного цикла конструкции

Изложенные выше методы компьютерного моделирования процессов возведения конструкции (раздел 4.12), процессов нагружения (раздел 4.13), моделирования различных форсмажорных ситуаций (раздел 4.11),

моделирования предварительного напряжения (раздел 4.7) и т.п. позволяют судить о возможности (может быть пока и несколько схематичного) моделирования жизненного цикла конструкций.

Примерная схема такого моделирования представлена на рис. 4.59.

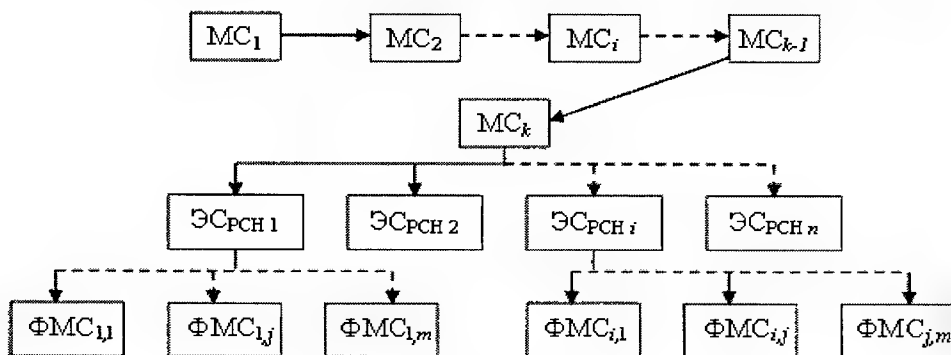


Рис 4.59

Введены следующие обозначения:

МС – монтажная стадия, общее количество k .

ЭС – эксплуатационная стадия, общее количество n .

ФМС – форс-мажорные стадии (под такими ситуациями подразумевается внезапный выход из строя ответственных несущих элементов), общее количество m .

Монтажные стадии последовательно сменяют друг друга и соответствуют последовательности возведения конструкции. Последняя k стадия соответствует возведенной конструкции и ее НДС «помнит» всю информацию последовательности возведения, связанную с изменениями конструктивной схемы, добавлением и снятием монтажных нагрузок и т.п.

Стадия $МС_k$ является стартовой для расчета на эксплуатационные нагрузки. НДС на эксплуатационных стадиях определяется расчетом на различные сочетания нагружений. Некоторые эксплуатационные стадии в свою очередь являются стартовыми для моделирования форс-мажорных ситуаций.

Конечно, такое моделирование даже, с учетом все возрастающих возможностей современных компьютеров, является громоздким. Помимо большого количества расчетов различных конструктивных схем, каждый из них, как правило, надо проводить в физически и геометрически нелинейной постановке. Особенно это касается форс-мажорных ситуаций, когда необходимо определять дополнительные резервы несущей способности конструкции с целью не допустить прогрессирующего разрушения при минимальных дополнительных расходах материалов. Кроме того, определение НДС конструкции на эксплуатационных стадиях должно учитывать временные изменения реологических свойств материала (усадка, ползучесть и др.), что также обуславливает необходимость проведения расчета в нелинейной постановке.

Программные комплексы, имеющие в своем составе процессоры, позволяющие проводить компьютерное моделирование процесса возведения, процесса нагружения, проводить расчеты в физически и геометрически нелинейной постановке, вплотную подошли к решению этой проблемы*. Ну и конечно, программные комплексы, ориентированные на моделирование жизненного цикла конструкций, должны иметь удобный и развитый мониторинг, позволяющий в автоматическом режиме отслеживать поведение конструкции на всех стадиях и выдавать информацию о тех стадиях, которые являются определяющими для сечений того или иного элемента.

4.15 Как проверить правильность полученных результатов компьютерного моделирования.

Правильность результатов – понятие очень неопределенное и растяжимое, в конце концов, это тоже термин и о нем можно спорить. Может быть, более логичным было бы такое название раздела: «Как выяснить оправдали ли полученные результаты наши ожидания» или «Как выяснить получили ли мы все ответы на поставленные вопросы в наших размышлениях о работе конструкции».

В технологии проведения компьютерного моделирования фигурируют два участника пользователь (инженер, специалист, исследователь) и программный комплекс. Если в докомпьютерный период в связке инженер – арифмометр (логарифмическая линейка, счеты) инженер играл главенствующую роль и по сути это был инженер, вооруженный более или менее удобным инструментом, то теперь развитая функциональность программного комплекса позволяет говорить о партнерстве. Как партнеры в общем деле пользователь и программный комплекс должны иметь распределение функций, обязанностей и даже ответственности.

Распределение функций – субстанция очень подвижная и имеет устойчивую тенденцию к перекладыванию все больших функций на «плечи» программного комплекса. Что же касается ответственности, то тут двух мнений быть не может, пользователь отвечает за правильность полученных результатов. Программный комплекс, хотя уже не инструмент, но все же хоть и «умный», но инструментарий. Поэтому, вопросы юридического характера типа «отвечают ли разработчики программного комплекса за правильность результатов» не имеют смысла, это все равно, что привлекать к ответственности изобретателя компьютера. Компьютер, кстати, тоже является полноправным участником процесса, от него тоже многое зависит.

* В ПК ЛИРА эти методы реализованы.

Итак, пользователь как ответственное лицо должен иметь развитый набор средств и знаний, чтобы не допустить ошибок на этапе синтеза компьютерной модели, а затем вынести вердикт о правильности полученных результатов.

Сначала об ошибках. Ошибки могут быть обусловлены несовершенствами программного комплекса или сбоями компьютера. Сбои компьютера встречаются крайне редко и легко диагностируются, так как полученные результаты в этом случае имеют вид абракадабры. Ошибки, обусловленные неправильной реализацией в программном комплексе различных методов, встречаются чаще. Здесь следует сделать такие ремарки:

во-первых, как правило, программные комплексы массового применения разрабатывают специалисты высокой квалификации, а жесткие законы конкуренции заставляют их с особым рвением заботиться о качестве создаваемого продукта;

во-вторых, в сертификацию программного продукта, как правило, включается такая процедура как верификация. Верификация основывается на решении ряда задач, точное решение которых заранее известно.

Вместе с тем, пользователю следует всегда внимательно и не безоговорочно относиться к выводам верификационных проверок и к соответствию возможностей программного комплекса декларациям разработчиков, которые в целях рекламы иногда могут быть «слишком оптимистичными». Однако, гораздо большее поле для «производства» ошибок предоставляет сам пользователь. Делать ошибки, заложено в природе человека – «errare humanum est» (человеку свойственно ошибаться). Причин для этого много – от неполной информации о возможностях программного комплекса до элементарной невнимательности. По характеру ошибки условно можно разделить на формальные и содержательные. К формальным ошибкам относятся такие, которые можно обнаружить на основе строгих формальных рассуждений. Например, нагрузка приложена вне области конструкции или указан тип четырехугольного конечного элемента, а в описании указано только три узла и т.д. и т.п. программный комплекс как истинный партнер помогает пользователю обнаружить и устранить большинство формальных ошибок. С одной стороны программный комплекс непосредственно обнаруживает ошибки (режим диагностики), с другой стороны предоставляет пользователю многочисленные режимы визуальной проверки созданной компьютерной модели (многочисленные фильтры, цветовая индексация, визуализация в теле, масштабирование, оконный режим и мн. др.).

Очень важно наличие в программном комплексе режима предупреждений ориентированного на поиск различных несоответствий, которые могут быть допущены пользователем, в том числе и сознательно. Например, наличие узлов с одинаковыми координатами, дублирование конечных элементов, отрицательная жесткость и т.п. пользователь должен

быть предупрежден об этих несоответствиях, и по своему усмотрению принимать или не принимать соответствующие меры. Типичным предупреждением может служить обнаружение программным комплексом местной геометрической изменяемости.

На рис. 4.60 приведена причина такой ситуации. Это фрагмент плоской шарнирно-стержневой системы, каждый узел которой имеет два узловых неизвестных – два линейных перемещения по направлению осей x и y . Нетрудно убедиться, что узел А обуславливает местную геометрическую изменяемость.

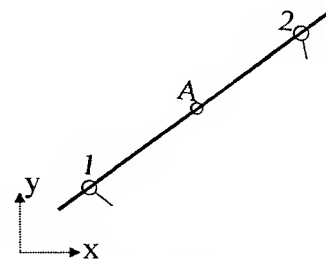


Рис. 4.60

«Умный» программный комплекс легко обнаруживает эту изменяемость и если в узле А отсутствует сила не совпадающая с линией 1–2, самостоятельно накладывает связь в этом узле и выдает предупреждение. Эта ситуация часто встречается при использовании плоских конечных элементов балок-стенок (имеющих два узловых неизвестных) при моделировании конструкций типа пространственных складчатых покрытий или при использовании плоских конечных элементов оболочки, имеющих пять узловых неизвестных в узле (три линейных перемещения и два угла поворота) при моделировании пространственных пластинчатых систем общего вида, имеющих шесть узловых неизвестных в узле.

Содержательные ошибки обнаружить на стадии создания компьютерной модели значительно сложнее. Их характер очень разнообразен – ошибка в величинах нагрузок, в жесткостях, в геометрии системы, неправильное наложение связей, неправильное объединение перемещений и мн. др. К сожалению, помимо невнимательности, основной причиной допущения такого рода ошибок является недостаточная квалификация пользователя (подробнее об этой проблеме ниже).

Обнаружить эти ошибки на стадии создания компьютерной модели, кроме проявления особой тщательности, можно используя несколько различных способов задания исходных данных. Продвинутое программные комплексы допускают возможные альтернативные варианты создания компьютерных моделей. Конечно, более кардинальным решением проблемы является решение задачи по двум различным программным комплексам с дальнейшим решением задач и сравнением полученных результатов.

И все-таки большинство в основном содержательных ошибок обнаруживается при анализе результатов решения задачи.

Анализ результатов – это заключительный этап компьютерного моделирования, который предшествует дальнейшему проектированию конструкции или установлению жизнеспособности существующей конструкции.

Прежде всего, необходимо убедиться, что полученные результаты соответствуют созданной компьютерной модели. Здесь пользователю большую помощь оказывает программный комплекс, имеющий единую интуитивную среду. В этом случае пользователь в многооконном режиме может просматривать и анализировать созданную модель и полученные результаты.

Так, например, правильность наложения связей легко проверить, анализируя деформированные схемы, правильность приложенной нагрузки косвенно можно проверить, анализируя эпюры или изополя усилий, правильность распределения масс и задания жесткостей также косвенно можно проверить, просмотрев анимацию колебаний и т.п.

Продвинутые программные комплексы кроме стандартной информации о напряженно-деформированном состоянии конструкции (деформированные схемы, эпюры, изополя, изолинии усилий и напряжений, таблицы значений перемещений, усилий, напряжений, характеристик динамического анализа и т.п.) выдают много дополнительной информации, которая также помогает пользователю в анализе НДС. К такому типу информации относится указание наиболее нагруженных элементов, узлов с наибольшими усилиями, указание центров тяжести масс, жесткостей, равнодействующих нагрузок для всей конструкции или ее фрагментов. Например, очень полезно знать равнодействующую вертикальных сил и моментов на фундаментную плиту здания.

Существует также ряд стандартных приемов, помогающих пользователю в таком анализе. К ним, например, относятся:

- Анализ порядка усилий, напряжений и перемещений. Здесь необходимо внимательно установить соответствие единиц измерения в созданной модели и полученных результатов.
- Установление соответствия опорных реакций суммарным равнодействующим горизонтальных и вертикальных нагрузок.
- Использование симметричных расчетных схем, так как наличие симметрии в НДС такой схемы позволяет судить не только о правильности исходных данных, но и о точности решения задачи, что особенно важно для больших систем. Если исходная компьютерная модель не имеет симметрии, но достаточно близка к ней, то очень полезно сделать тестовую симметричную модель максимально приближенную к исходной.

Но, конечно, самым действенным приемом в анализе напряженно-деформированного состояния является установление соответствия полученных результатов представлению пользователя о работе конструкции. Основным приемом в установлении такого соответствия является использование упрощенных моделей. Опытный пользователь высокой квалификации практически всегда использует одну или несколько

упрощенных моделей, устанавливает основные особенности работы такой конструкции и использует их в дальнейшем анализе. Всегда существовало, существует и будет существовать очень уважаемое созвездие инженеров-конструкторов, которые заявляют, что знание о работе балки на двух опорах (знаменитое $\frac{ql^2}{8}$) и консольной балки ($\frac{Pl^3}{3EI}$, $\frac{ql^2}{2}$...) достаточно для оценки практически любой конструкции. Конечно, это некое утрирование, но какое это веское подтверждение необходимости использования упрощенных расчетных схем и определенный укор любителям большеразмерных (не менее миллиона неизвестных) расчетных схем!

Если же принято обоснованное решение о необходимости использования большеразмерной, сложной, учитывающей большое количество факторов компьютерной модели, то сопутствующие упрощенные модели просто необходимы.

Конечно, использование этого приема связано с высокой квалификацией инженера. Существующее мнение о том, что с увеличением возможностей программных комплексов требования к квалификации инженеров будут снижаться, по крайней мере, очень оптимистично. Гораздо более убедительно мнение, что квалификация пользователя должна расти и для этого имеется весомый аргумент: всё возрастающая мощь программных комплексов всё больше будет избавлять пользователя от рутинной работы, оставляя ему область размышлений, которые будут становиться все более изощреннее, а следовательно и требовать более высокой квалификации.

Авторы книги надеются, что представленный материал внесет небольшую лепту в непрерывный процесс совершенствования инженерного искусства.

Литература к главе 4

- 4.1 Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам – М.: Стройиздат, 1977. – 132с.
- 4.2 ЛИРА 9. Коллектив авторов. Под редакцией А.С. Городецкого. –К.: ФАКТ, 2003г. – 472с.
- 4.3 Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем. Математические основы. – М.: Мир, 1978. – 114с.
- 4.4 Перельмутер А.В., Сливкер В.И. О реализации сложных кинематических условий при расчете дискретных систем методом перемещений.//МКЭ в строительной механике. № 368.– Л.: Труды ЛПИ, 1979. –С 26-39.
- 4.5 Качурин В.К. Гибкие нити с малыми стрелками. – М.: Гостехиздат, 1956. – с.
- 4.6 Мацелинский Р.Н. Статический расчет упругой нити.//Сопротивление материалов и расчет сооружений. 1959, №4.
- 4.7 Дмитриев Л.Г., Городецкий А.С. Вантовые системы //Строительство и архитектура, 1963, №2.
- 4.8 Кузнецов Э.Н. Радиальные вантовые системы. – М.: Госстройиздат, 1963.
- 4.9 Людковский И.Г. Характеристика вантовых систем и висячих оболочек. – М.: Госстройиздат, 1962. Труды НИИЖБ, вып. 2.
- 4.10 Дмитриев Л.Г., Касилов А.В. Вантовые покрытия. –К.: Будівельник, 1968. – 167с.
- 4.11 Бирбраер А.Н. Расчет конструкций на сейсмостойкость. – Санкт-Петербург: Наука, 1998, – 255с.
- 4.12 Сливкер В.И. К вопросу о назначении характеристик двухпараметрового упругого основания.//Строительная механика и расчет сооружений. 1981, № 1 – С. 75-87.
- 4.13 Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М., Л.: Госстройиздат, 1954, 1956.
- 4.14 Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов Филоненко-Бородич М.М. Простейшая модель упругого основания, способная распределить нагрузку. – М.: МЭМИИТ, 1945.
- 4.15 Барбашов В.А., Федоровский В.Г. Трехпараметровая модель грунтового основания и свайного поля, учитывающая мембранные структурные деформации грунта.//Основания, фундаменты и механика грунтов. 1978, № 4 – С. 17-20.
- 4.16 Здоренко В.С., Городецкий А.С., Елсукова В.И., Сливкер В.И.. Применение метода конечных элементов к расчету конструкций на упругом основании с двумя коэффициентами постели.//Сопротивление материалов и теория сооружений. Вып 27. – Киев: Будівельник, 1975. С. 180-192.

- 4.17 Городецкий А.С., Евзеров И.Д., Стрелец-Стрелецкий Е.Б., Боговис В.Е., Гензерский Ю.В., Городецкий Д.А. Метод конечных элементов. Теория и численная реализация.-К.: Факт, 1997 – 140с.
- 4.18 P. Paultre, C. Moisan, Distribution of moments in reinforced concrete slabs with continuous drop panels, civil Engineering. 29, 2002, p. 119-124.
- 4.19 Городецкий А.С. К расчету тонкостенных железобетонных конструкций в неупругой стадии.//Тр. НИИСК. 1965, вып 6. – С. 86-93.
- 4.20 Городецкий А.С., Здоренко В.С. Расчет железобетонных балок-стенок с учетом образования трещин методом конечных элементов.//В кн. Сопротивление материалов и расчет сооружений. Вып 27. – Киев: Будівельник, 1975. С. 59-65.
- 4.21 Городецкий А.С., Здоренко В.С. Расчет железобетонных плит с учетом образования трещин методом конечных элементов.//В кн. Прикладные проблемы прочности и пластичности.– Горький: изд-во Горьковского государственного университета, 1976. – С. 48-52.
- 4.22 Лантух-Лященко А.И. Опытные данные о напряженном состоянии и несущей способности неразрезной железобетонной балки-стенки. – Таллинн: Тр. Таллиннского политехнического института., 1965, серия А, 208. – С. 111-117.
- 4.23 Королев А.Н., Крылов С.М. Способ расчета прогибов железобетонных плит опертых по контуру и безбалочных перекрытий при действии кратковременной нагрузки.//В кн. Исследование прочности, жесткости и трещиностойкости железобетонных конструкций. – М.: Госстройиздат, 1962. – С. 85-141.
- 4.24 Берг О.Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона. – М.: Госстройиздат, 1962. – 96с.
- 4.25 Городецкий А.С., Батрак Л.Г., Городецкий Д.А., Лазнюк М.В., Юсипенко С.В. Расчет и проектирование конструкций высотных зданий из монолитного железобетона. – К.: Факт, 2004. – 105с.

Приложение 1 Математические основы МКЭ

Приведены вариационные постановки линейных задач теории упругости. Доказаны основные теоремы о сходимости и оценках погрешности МКЭ и исследованы наиболее известные конечные элементы.

Рассмотрены статические нелинейные задачи – геометрическая и физическая нелинейность, задачи с односторонними ограничениями – и приближенные методы их решения. Проанализированы также задачи устойчивости.

Исследованы разностные схемы для линейных и нелинейных динамических задач.

Приведены (без доказательств) используемые теоремы функционального анализа, а также список обозначений.

Нумерация формул в приложении – тройная.

Линейная статическая задача

Здесь представлены известные соотношения теории упругости для трехмерной задачи, а также стержней и оболочек в линейной постановке для изотропного материала.

Соотношения для стержней и оболочек получены при гипотезах о равенстве нулю соответствующих элементов трехмерного тензора напряжений.

Рассматриваются стержни с прямолинейной осью и оболочки с плоской срединной поверхностью.

Трехмерная задача

Вектор-функцию перемещений в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ обозначим $u = (u_1, u_2, u_3)$.

Имеют место соотношения между перемещениями и деформациями (зависимости Коши)

$$\varepsilon_{i,j}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2. \quad (1.1.1)$$

Связь между напряжениями и деформациями (закон Гука) в изотропном случае имеет вид

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{G} \sigma_{i,j} - \frac{\mu}{E} \sigma_0 \delta_{i,j} \quad (1.1.2)$$

или

$$\sigma_{i,j} = G \left[\varepsilon_{i,j} + \frac{\mu}{1-2\mu} \varepsilon_0 \delta_{i,j} \right], \quad (1.1.3)$$

где

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad \sigma_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}.$$

Выразив с помощью (1.1.3) работу внутренних сил через деформации, получим

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma_{i,j}(u) \varepsilon_{i,j}(v) d\lambda = G \int_{\Omega} \left[\varepsilon_{i,j}(u) \varepsilon_{i,j}(v) + \frac{\mu}{1-2\mu} \varepsilon_0(u) \varepsilon_0(v) \right] d\lambda. \quad (1.1.4)$$

Симметричность $a(u, v) = a(v, u)$ очевидна.

Из (1.1.4) получаем, что при $-1 < \mu < 1/2$ справедливо неравенство

$$a(u, u) \geq G \int_{\Omega} \varepsilon_{i,j}(u) \varepsilon_{i,j}(u) d\Omega. \quad (1.1.5)$$

Далее будет предполагаться, что граничные условия для перемещений, заданные на Γ_0 , однородны (нулевые граничные условия), и не допускают перемещений Ω как твердого тела (отсутствие жестких смещений).

Такие перемещения соответствуют отсутствию деформации, т.е. $\varepsilon_{i,j}(u) = 0$. Эти равенства,

как известно, выполняются в том и только том случае, когда

$$u(x) = a + [b, x], \quad a, b \in R^3.$$

Если из граничных условий можно получить 6 линейно-независимых однородных уравнений, то тогда $a=b=0$, и перемещения без деформаций невозможны. При отсутствии жестких смещений из (1.1.5) и неравенства Корна следует коэрцитивность симметричной билинейной формы $a(u, v)$, т.е. справедливо неравенство

$$a(u, u) \geq K \|u\|_1 \|u\|_1. \quad (1.1.6)$$

Обратное неравенство очевидно. Поэтому множество возможных перемещений V это множество всех функций $u(x)$, таких, что $u_i \in H_1$, и которые удовлетворяют граничным условиям на Γ_u . Энергетическая норма определяется тогда равенством

$$\|u\|_V = \sqrt{a(u, u)}. \quad (1.1.7)$$

Возможная работа внешних сил определяется равенством

$$l(v) = \int_{\Omega} f_i(x) v_i(x) d\lambda + \int_{\Gamma_F} F_i(x) v_i(x) d\lambda, \quad (1.1.8)$$

где Γ_F – часть границы, где заданы поверхностные нагрузки F , f – распределенные по Ω нагрузки.

При учете температурных воздействий предполагается, что распределение температуры $T(x)$ по области Ω известно. Из деформаций ε_{ij} в (1.1.2) и (1.1.3) вычитаются температурные, равные cT , где c – коэффициент температурного расширения. Из (1.1.4) получаем, что в формулу для $l(v)$ добавляется слагаемое

$$- \frac{E}{1-2\mu} c \int_{\Omega} T \varepsilon_{ii}(v) d\Omega.$$

Будем предполагать, что функции f и F такие, что выполнено неравенство

$$|l(v)| \leq K \|u\|_V. \quad (1.1.9)$$

Отметим, что неравенство (1.1.9) в трехмерном случае не выполнено для сосредоточенных и распределенных по линии сил, что следует из теорем вложения.

Задача теории упругости состоит в определении перемещения $u(x)$, удовлетворяющего граничным условиям на Γ_u , при воздействии сил f и F .

Согласно принципу возможных перемещений, функция $u(x) \in V$ удовлетворяет при всех $v \in V$ равенству

$$a(u, v) + l(v) = 0. \quad (1.1.10)$$

Из неравенств (1.1.6) и (1.1.9) следует существование и единственность решения $u \in V$ задачи (1.1.10).

Уравнения (1.1.10) – это условия минимума функционала энергии

$$\pi(u) = a(u, u) / 2 + I(u), \quad (1.1.11)$$

т.к. левая часть (1.1.10) соответствует производной $\pi(u)$.

Выполнив в (1.1.10) интегрирование по частям (с применением формулы Грина) и пользуясь произвольностью функции $v \in V$, получим уравнения равновесия в Ω

$$-\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (1.1.12)$$

и граничные условия на Γ_F

$$\sigma_{ij} v_j + F_i = 0. \quad (1.1.13)$$

Принцип возможных перемещений принят здесь в качестве исходного, потому что из него наиболее естественным образом могут быть получены уравнения МКЭ.

Приняв исходным принцип минимума полной энергии, получаем из него, приравняв к нулю производную $\pi(u)$, уравнения (1.1.10), а затем и уравнения равновесия.

Исходя из уравнений равновесия, домножив их скалярно на произвольную функцию $v \in V$ и выполнив интегрирование по частям, получим (1.1.10).

Формула интегрирования по частям для возможной работы внутренних сил имеет вид

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma_{i,j}(u) \varepsilon_{i,j}(v) d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{i,j}(u) v_j v_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{i,j}(u)_{,j} v_i d\Omega. \quad (1.1.14)$$

Из (1.1.14) и (1.1.10), используя произвольность $v \in V$, получаем уравнения равновесия (1.1.12) и граничные условия (1.1.13).

Пользуясь (1.1.14) и теоремой вложения, получим граничные условия на поверхности раздела двух сред с различными жесткостными характеристиками.

Пусть $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Gamma_{1,2} = \Omega_1 \cap \Omega_2$ – их общая граница. ν^1 и ν^2 – единичные векторы нормалей к $\Gamma_{1,2}$, соответствующие Ω_1 и Ω_2 . Поскольку ν^1 направлена от Ω_1 , а ν^2 – от Ω_2 , то в каждой точке $\Gamma_{1,2}$ справедливо равенство

$$\nu^1 = -\nu^2 = \nu. \quad (1.1.15)$$

Обозначим u^1 и u^2 перемещения в Ω_1 и Ω_2 . Из теоремы вложения следует, что на $\Gamma_{1,2}$ функции u^1 и u^2 принимают одинаковые значения

$$u^1 = u^2 = u. \quad (1.1.16)$$

Из формулы интегрирования по частям и (1.1.15), (1.1.16) получим:

$$\int_{\Gamma_{1,2}} [\sigma_{i,j}(u_1) - \sigma_{i,j}(u_2)] v_j v_i d\Gamma = 0,$$

откуда следует непрерывность нормальных напряжений $\sigma_{i,j} v_j$ на $\Gamma_{1,2}$.

Основные соотношения (1.1.1) – (1.1.4), (1.1.8) приведены в [1, 2, 39, 41].

Стержни

Основные зависимости для стержней будем получать из аналогичных соотношений трехмерной теории упругости, вводя соответствующие предположения.

Пусть ось X_1 направлена вдоль прямолинейной оси стержня, представленной отрезком $[0, L] = \Omega$. Оси X_2, X_3 – главные центральные оси сечения.

Двумерную область сечения обозначим Ω_0 , единичный вектор нормали к границе сечения Γ_0 имеет вид $\nu = (0, \nu_2, \nu_3)$.

Имеем

$$\int_{\Omega_0} x_2 d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} x_3 d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} x_2 x_3 d\Omega_0 = 0. \quad (1.2.1)$$

$$F = \int_{\Omega_0} d\Omega_0$$

Обозначим $\int_{\Omega_0} d\Omega_0$ – площадь сечения.

$$J_2 = \int_{\Omega_0} x_3^2 d\Omega_0, \quad J_3 = \int_{\Omega_0} x_2^2 d\Omega_0 \quad (1.2.2)$$

– главные центральные моменты инерции сечения.

Поскольку размеры сечения существенно меньше длины стержня, предполагается, что

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0. \quad (1.2.3)$$

Эти условия удовлетворяются, если положить (решение Сен-Венана)

$$u_1(x) = u_1 - x_2 u_{2,1} - x_3 u_{3,1} + 2(u_{2,1,1} \psi_2 + u_{3,1,1} \psi_3) + \alpha_{0,1} \psi_1,$$

$$u_2(x) = u_2 - (x_3 - x_{3,0}) \alpha_0 + \mu[(x_2^2 - x_3^2) u_{2,1} + 2x_2 x_3 u_{3,1}] / 2,$$

$$u_3(x) = u_3 + (x_2 - x_{2,0}) \alpha_0 + \mu[2x_2 x_3 u_{2,1} + (x_3^2 - x_2^2) u_{3,1}] / 2, \quad (1.2.4)$$

где функции u_1, u_2, u_3, α_1 зависят только от x_1 , функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 – только от x_2, x_3 , причем $\psi_1 = \varphi_1 - x_{3,0} x_2 + x_{2,0} x_3 - c_0, x_{2,0}, x_{3,0}, c_0$ – числа.

Вычислив деформации и напряжения по (1.1.1), (1.1.3) получим, предполагая отсутствие распределенных по оси нагрузок

$$\varepsilon_{1,1} = u_{1,1} - x_2 u_{2,1,1} - x_3 u_{3,1,1} + \alpha_{0,1,1} \psi_1,$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1,2} &= \frac{1}{2} \alpha_{0,1} (\varphi_{1,2} - x_2) + u_{2,1,1,1} [\mu (x_2^2 - x_3^2)/4 + \psi_{2,2}] + u_{3,1,1,1} [\mu x_2 x_3/2 + \psi_{3,2}] \\ \varepsilon_{1,3} &= \frac{1}{2} \alpha_{0,1} (\varphi_{1,3} + x_2) + u_{2,1,1,1} [\mu x_2 x_3/2 + \psi_{2,3}] + u_{3,1,1,1} [\mu (x_3^2 - x_2^2)/4 + \psi_{3,3}] \\ \sigma_{1,1} &= E \varepsilon_{1,1}, \sigma_{1,2} = G \varepsilon_{1,2}, \sigma_{1,3} = G \varepsilon_{1,3}\end{aligned}\quad (1.2.5)$$

Для определения функций ψ_1, ψ_2, ψ_3 воспользуемся уравнениями равновесия (1.1.12) и (1.1.13). Эти уравнения при $i=2,3$ удовлетворяются тождественно.

При $i=1$ получаем уравнения

$$\Delta \psi_2 = x_2, \Delta \psi_3 = x_3, \Delta \varphi_1 = 0 \text{ в } \Omega_0,$$

где $\Delta \varphi = \varphi_{1,2,2} + \varphi_{1,3,3}$ - оператор Лапласа; и граничные условия

$$\begin{aligned}\psi_{2,2} v_2 + \psi_{2,2} v_2 + \mu [(x_2^2 - x_3^2) v_2 + 2 x_2 x_3 v_3]/4 &= 0, \\ \psi_{3,2} v_2 + \psi_{3,3} v_3 + \mu [2 x_2 x_3 v_2 + (x_3^2 - x_2^2) v_3]/4 &= 0, \\ \varphi_{1,2} v_2 + \varphi_{1,3} v_3 + x_2 v_3 - x_3 v_2 &= 0, \quad \text{на } \Gamma_0\end{aligned}\quad (1.2.6)$$

Задача вида (1.2.6), т.е.

$$\Delta \varphi = p \text{ в } \Omega_0, \quad \varphi, v = g \text{ на } \Gamma_0$$

- это хорошо изученная задача Неймана [38]. Она имеет единственное (с точностью до аддитивной постоянной) решение, если

$$\int_{\Gamma_0} g d\Gamma = 0.$$

Эти равенства для задач (1.2.6) доказываются с использованием формулы Грина при $v=1$ и равенств (1.2.1).

Значение аддитивной постоянной определяется, например, из условия равенства функции φ нулю в какой-либо точке Γ_0 .

Определив ψ_1, ψ_2, ψ_3 , находим затем числа $x_{2,0}, x_{3,0}, c_0$ из условий

$$\int_{\Omega_0} x_2 \psi_1 d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} x_3 \psi_1 d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \psi_1 d\Omega_0 = 0. \quad \text{Тогда}$$

$$x_{2,0} = -\frac{1}{J_2} \int_{\Omega_0} x_3 \varphi_1 d\Omega_0, \quad x_{3,0} = \frac{1}{J_3} \int_{\Omega_0} x_2 \varphi_1 d\Omega_0, \quad c_0 = \frac{1}{F} \int_{\Omega_0} \varphi_1 d\Omega_0.$$

Точку в сечении с координатами $(x_1, x_{2,0}, x_{3,0})$ называют центром кручения [2]. Подставив (1.2.5) в выражение для возможной работы внутренних сил (1.1.4), получим

$$a_0(u, u) = \int_0^L \int_{\Omega_0} [E \varepsilon_{1,1}^2 + 2G(\varepsilon_{1,2}^2 + \varepsilon_{1,3}^2)] d\Omega_0 dx_1.$$

Вычислим интегралы по сечению Ω_0 :

$$a_1(u, u) = E \int_{\Omega_0} \varepsilon_{1,1}^2 d\Omega_0 = EF u_{1,1}^2 + E J_3 u_{2,1,1}^2 + E J_2 u_{3,1,1}^2 + E J_\omega \alpha_{1,1,1}^2, \quad (1.2.7)$$

где J_ω - бимомент инерции,

$$J_\omega = \int_{\Omega_0} \varphi_1^2 d\Omega - x_{2,0}^2 J_2 - x_{3,0}^2 J_3 - c_0^2 F; \quad (1.2.8)$$

$$2G \int_{\Omega_0} (\varepsilon_{1,1}^2 + \varepsilon_{1,3}^2) d\Omega_0 = \frac{G}{2} J_1 \alpha_{0,1}^2 + \frac{2(E J_3 u_{2,1,1,1})^2}{GF_3} + \frac{2(E J_2 u_{3,1,1,1})^2}{GF_2}, \quad (1.2.9)$$

где J_1 - момент инерции кручения,

$$J_1 = \int_{\Omega_0} [(\varphi_{1,2} - x_3)^2 + (\varphi_{1,3} + x_2)^2] d\Omega_0; \quad (1.2.10)$$

F_2, F_3 - сдвиговые площади,

$$\frac{1}{F_3} = \frac{\int_{\Omega_0} [\eta_{2,2}^2 + \eta_{2,3}^2] d\Omega_0}{J_3^2 (1 + \mu)^2},$$

$$\frac{1}{F_2} = \frac{\int_{\Omega_0} [\eta_{3,2}^2 + \eta_{3,3}^2] d\Omega_0}{J_2^2 (1 + \mu)^2}, \quad (1.2.11)$$

$$\eta_{22} = \mu(x_2^2 - x_3^2)/4 + \psi_{2,2},$$

$$\eta_{23} = \mu x_2 x_3 / 2 + \psi_{2,3},$$

$$\eta_{32} = \mu x_2 x_3 / 2 + \psi_{3,2},$$

$$\eta_{33} = \mu(x_3^2 - x_2^2)/4 + \psi_{3,3}$$

При вычислении левой части (1.2.9) использованы равенства

$$\int_{\Omega_0} [\eta_{i2} \eta_{j2} + \eta_{i3} \eta_{j3}] d\Omega_0 = 0, \quad 1 \leq j < i \leq 3, \quad (1.2.12)$$

$$\partial e \quad \eta_{12} = \varphi_{1,2} - x_3, \quad \eta_{13} = \varphi_{1,3} + x_2.$$

Левые части равенства (1.2.12) являются коэффициентами при $\alpha_{0,1} u_{2,11}$, $\alpha_{0,1} u_{3,111}$ и $u_{2,111}$ в выражении для работы касательных напряжений.

Равенства (1.2.12) при $j=1$, $i=2,3$ доказываются с использованием формулы Грина интегрирования по частям и уравнений (1.2.6).

Доказательство равенства (1.2.12) при $j=2$, $i=3$ авторам не известно.

Отметим, что при $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$ из (1.2.4), (1.2.5) получаем известные зависимости гипотезы плоских сечений. Функция ψ_1 – депланация при кручении, функции ψ_2, ψ_3 определяют касательные напряжения при изгибе.

При расчетах стержней используются интегральные характеристики напряжений – усилия, которые, как известно, равны:

$$\begin{aligned} N_1 = N &= \int_{\Omega_0} \sigma_{1,1} d\Omega_0 = EF u_{1,1}, \\ N_2 = Q_y &= \int_{\Omega_0} \sigma_{1,2} d\Omega_0 = E J_3 u_{2,1,1,1}, \\ N_3 = Q_z &= \int_{\Omega_0} \sigma_{1,3} d\Omega_0 = E J_2 u_{3,1,1,1}, \\ M_1 = M_x = M_{\kappa p} &= \int_{\Omega_0} (\sigma_{1,2} x_3 - \sigma_{1,3} x_2) d\Omega_0 = -\frac{G}{2} J_1 \alpha_{0,1}, \\ M_2 = M_y &= - \int_{\Omega_0} \sigma_{1,1} x_3 d\Omega_0 = E J_2 u_{3,1,1,1}, \\ M_3 = M_z &= \int_{\Omega_0} \sigma_{1,1} x_2 d\Omega_0 = -E J_3 u_{2,1,1,1}, \\ M_\omega &= \int_{\Omega_0} \sigma_{1,1} \psi_1 d\Omega_0 = E J_\omega \alpha_{0,1,1} \quad \text{- бимомент.} \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Компоненты вектора поворота $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, как известно, имеют вид

$$\beta_1 = (U_{3,2} - U_{2,3})/2, \quad \beta_2 = (U_{1,3} - U_{3,1})/2, \quad \beta_3 = (U_{2,1} - U_{1,2})/2.$$

Подставив (1.2.4) и вычислив средние значения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ поворотов по сечению, получим

$$\alpha_1 = \frac{1}{F} \int_{\Omega_0} \beta_1 d\Omega_0 = \alpha_0,$$

$$\alpha_2 = \frac{\int \beta_2 \eta_{2,2}}{(\Omega_0 + \mu) J_2} = -u_{3,1} + \frac{Q_3}{G F_3},$$

$$\alpha_3 = \frac{\int \beta_3 \eta_{3,3}}{(\Omega_0 + \mu) J_3} = -u_{2,1} - \frac{Q_2}{G F_2}. \quad (1.2.14)$$

Учет упругого основания может производиться в направлениях x_2 и x_3 . Для каждого направления задаются по два коэффициента $c_{1,i}$, $c_{2,i}$ и ширина поверхности контакта b_i , $i=2,3$. В выражение для возможной работы внутренних сил добавляется слагаемое

$$a_c(u, u) = \int_0^L c(u, u) dx_1,$$

$$c(u, u) = b_i [c_{1,i} u_i^2 + c_{2,i} \alpha_i^2] + d_1 \alpha_{1,1}^2 + d_2 \alpha_{1,1}^2,$$

где

$$d_1 = b_i \left[b_{2,i} + \frac{b_i^3}{12} c_{1,i} \right],$$

$$d_2 = \frac{b_i^3}{12} c_{2,i} \quad (1.2.15)$$

(суммирование по $i=2,3$).

При учете предварительного натяжения N добавляется слагаемое

$$a_N(u, u) = \int_0^L N (\alpha_2^2 + \alpha_3^2) dx_1. \quad (1.2.16)$$

Таким образом, работа внутренних сил для стержня имеет вид

$$a(u, u) = a_0(u, u) + a_c(u, u) + a_N(u, u). \quad (1.2.17)$$

Слагаемые a_0 , a_c , a_N определяются формулами (1.2.7) – (1.2.11), (1.2.15), (1.2.16).

Для вычисления возможной работы внешних сил, приложенных по объему стержня, воспользуемся (1.1.7) и формулами для перемещений (1.2.4). Тогда

$$I(u) = \int_0^L (n_i u_i + m_i \alpha_i) dx_1 + \int_0^L m_\omega \alpha_{1,1} dx_1,$$

где
$$n_i = \int_{\Omega_0} f_i d\Omega_0,$$

$$m_1 = \int_{\Omega_0} [(x_2 - x_{2,0}) f_3 - (x_3 - x_{3,0}) f_2] d\Omega_0,$$

$$m_2 = \int_{\Omega_0} x_3 f_1 d\Omega_0, \quad m_3 = - \int_{\Omega_0} x_2 f_1 d\Omega_0, \quad m_\omega = \int_{\Omega_0} \psi_3 f_1 d\Omega_0. \quad (1.2.18)$$

При нагрузках F_i , распределенных по отдельному сечению, получаем аналогичные формулы для сосредоточенных сил и моментов.

Из формул (1.2.16) и (1.2.17) получаем уравнение принципа возможных перемещений для стержня.

Энергетическая норма для стержня определяется из величины $a_1(u, u)$ (1.2.7) при $EJ\omega=0$. Для нее выполнено неравенство

$$a_1(u, u) \geq K (\|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_2^2 + \|u_3\|_2^2 + \|\alpha_1\|_1^2). \quad (1.2.19)$$

Энергетическим пространством является множество удовлетворяющих граничным условиям функций u, α_1 , таких, что

$$u_1, \alpha_1 \in H^1, \quad u_2, u_3 \in H^2.$$

Граничные условия на Γ_u (концы стержня) задаются для u, α_1 .

Неравенство (1.1.19) для стержней выполнено всегда.

Распределение температуры в сечении стержня предполагается линейным,

$$T(x) = T_0 - x_2 T_2 - x_3 T_3, \quad (1.2.20)$$

поэтому при учете температурных воздействий в выражение для $I(v)$ добавляется слагаемое

$$- cE \int_0^L (F u_{1,1} + T_3 J_3 u_{2,1,1} + T_2 J_2 u_{3,1,1}) dx_1. \quad (1.2.21)$$

При отсутствии изгиба и кручения (элемент фермы) перемещения u_i постоянны по сечению и функционал $a_1(u, u)$ сводится к простейшему:

$$a_F(u, u) = \int_0^L EF u_{1,1}^2 dx_1. \quad (1.2.22)$$

Обозначим также

$$a_M(u, u) = a_1(u, u) - a_F(u, u) \quad (1.2.23)$$

функционал, соответствующий изгибу и кручению.

Пластины (оболочки)

Зависимости для оболочек, получим, как и для стержней, из соотношений трехмерной теории упругости.

Пусть срединная поверхность оболочки Ω лежит в плоскости x_1, x_2 , Γ – ее граница, толщина оболочки – δ , δ_0 – отрезок $[-\delta/2, \delta/2]$. Индексы i, j для оболочек принимают значения 1, 2.

Поскольку толщина оболочки предполагается существенно меньшей ее размеров в плане, вводится гипотеза (гипотеза Кирхгофа) $\sigma_{k3}=0$, $k=1,2,3$. Она удовлетворяется, если положить

$$\begin{aligned} U_i(x_1, x_2, x_3) &= u_i - x_3 u_{3,i}, \\ U_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3, \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

где функции u_1, u_2, u_3 зависят только от x_1, x_2 .

Вычислив деформации и напряжения согласно (1.1.1) – (1.1.3), получим

$$\varepsilon_{i,j} = [u_{i,j} + u_{j,i} - x_3(\chi_{i,j} + \chi_{j,i})] / 2, \quad (1.3.2)$$

$$\sigma_{i,j} = G \left[\varepsilon_{i,j} + \frac{\mu}{1-\mu} (\varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{2,2}) \delta_{i,j} \right], \quad (1.3.3)$$

где $\chi_{ij}=u_{3,ij}$ – кривизны.

Обозначим

$$\varepsilon_{i,j}^0 = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2 \quad (1.3.4)$$

деформации срединной поверхности, N_{ij}, M_{ij} – внутренние усилия и моменты. Имеем

$$N_{i,j} = \int_{\delta_0} \sigma_{i,j} dx_3 = G \delta \left[\varepsilon_{i,j}^0 + \frac{\mu}{1-\mu} (\varepsilon_{1,1}^0 + \varepsilon_{2,2}^0) \delta_{i,j} \right]; \quad (1.3.5)$$

$$M_{i,j} = \int_{\delta_0} x_3 \sigma_{i,j} d x_3 = \frac{G \delta^3}{12} \left[\chi_{i,j} + \frac{\mu}{1-\mu} (\chi_{1,1} + \chi_{2,2}) \delta_{i,j} \right]. \quad (1.3.6)$$

Кроме того, из уравнений равновесия имеем

$$N_{i,3} = Q_i = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)} \Delta u_{3,i} = M_{i,j,j}. \quad (1.3.7)$$

Вычислив значения α_i , α_2 , α_3 поворотов для оболочки, получим

$$\alpha_1 = u_{3,2}, \quad \alpha_2 = -u_{3,1}, \quad \alpha_3 = u_{2,1} - u_{1,2}. \quad (1.3.8)$$

Формулу для работы внутренних сил получим, подставив (1.3.2), (1.3.3) в (1.1.4) и проинтегрировав по x_3 . Получим

$$a_0(u, u) = \int_{\Omega} [N_{i,j} \varepsilon^0_{i,j} + M_{i,j} \chi_{i,j}] d\Omega. \quad (1.3.9)$$

При учете упругого основания задаются коэффициенты c_1 и $c_{2,i,j}$. В выражение для работы внутренних сил добавляется слагаемое

$$a_c(u, u) = \int_{\Omega} [c_1 u_3^2 + c_{2,i,j} \alpha_i \alpha_j] d\Omega. \quad (1.3.10)$$

При учете предварительных напряжений N_{ij}^0 добавляется слагаемое

$$a_N(u, u) = \int_{\Omega} N_{i,j}^0 \alpha_i \alpha_j d\Omega. \quad (1.3.11)$$

Работа внутренних сил, как и для стержня, имеет вид

$$a(u, u) = a_0(u, u) + a_c(u, u) + a_N(u, u). \quad (1.3.12)$$

Для внешних сил введем обозначения

$$n_i = \int_{\delta_0} f_i dz, \quad m_1 = \int_{\delta_0} z f_2 dz, \quad m_2 = - \int_{\delta_0} z f_1 dz, \quad m_3 = 0. \quad (1.3.13)$$

Тогда работа внешних сил имеет вид

$$I(u) = \int_{\Omega} [n_i u_i + m_i \alpha_i] d\Omega + \int_{\Gamma} [N_i u_i + M_i \alpha_i] d\Gamma. \quad (1.3.14)$$

где N_i , M_i определяются аналогично n_i , m_i по (1.3.13).

Из (1.3.12), (1.3.14) получаем уравнение принципа возможных перемещений для пластин.

Неравенство (1.1.9) для оболочек выполнено при отсутствии сосредоточенных сил, действующих в плоскости оболочки и сосредоточенных моментов.

Отметим также известную формулу интегрирования по частям для оболочек [16], [39]

$$\int_{\Omega} (N_{i,j} \varepsilon_{i,j} + M_{i,j} \chi_{i,j}) d\Omega = \int_{\Omega} -N_{i,j,j} u_{ji} + M_{i,j,ij} u_3 + \int_{\Gamma} (N_{i,j} \nu_j u_i - N_{i,3} \nu_i u_3 + M_{i,j} \nu_i \nu_j u_{3,\nu} + M_{i,j} \nu_i \tau_j u_{3,\tau}) d\Gamma, \quad (1.3.15)$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ – единичные векторы нормали и касательной к Γ ,

$$\tau_1 = -\nu_2, \quad \tau_2 = \nu_1, \quad u_{i,\nu} = u_i \nu_i, \quad u_{i,\tau} = u_i \tau_i.$$

Для гладкой границы можно записать

$$\int_{\Gamma} M_{i,j} \nu_i \tau_j u_{3,\tau} d\Gamma = - \int_{\Gamma} (M_{i,j} \nu_i \tau_j)_{,\tau} u_3. \quad (1.3.16)$$

В случае угловых точек в (1.3.16) добавляются слагаемые, учитывающие изменение ν и τ в этих точках.

Величины

$$R = -N_{i,3} \nu_i - (M_{i,j} \nu_i \tau_j)_{,\tau}, \quad M_\nu = M_{i,j} \nu_i \nu_j \quad (1.3.17)$$

называют обобщенной перерезывающей силой и нормальным моментом. На свободном краю они (а также $N_{i,j} \nu_j$) равны нулю. Граничные условия на Γ_u как следует из (1.3.15), (1.3.16) задаются для $u_1, u_2, u_3, u_{3,\nu}$.

Энергетическим пространством V задачи о тонкой пластине является множество функций

$u = (u_1, u_2, u_3)$, таких, что $u_1, u_2 \in H_1(\Omega)$, $u_3 \in H_2(\Omega)$, и которые удовлетворяют

граничным условиям на Γ_u .

Из теорем вложения следует непрерывность (на общей границе двух подобластей) функций $u_1, u_2, u_3, u_{3,1}, u_{3,2}$, а также усилий $N_{i,j} \nu_j, M_\nu, R$. Непрерывность угла поворота $\alpha_3 = u_{2,1} - u_{1,2}$ не имеет места, поскольку α_3 не входит в выражения для возможных работ ни внутренних, ни внешних (т.к. $m_3 = 0$) сил.

Энергетическая норма для оболочек определяется из $a_0(u, u)$. Она удовлетворяет неравенству

$$a_0(u, u) \geq K(\|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_1^2 + \|u_3\|_2^2). \quad (1.3.18)$$

Полагая в приведенных в настоящем разделе формулах $u_1 = u_2 = 0$, получим соотношения для изгибаемой плиты, которой соответствует функционал

$$a_M(u, u) = \int_{\Omega} M_{i,j} \chi_{i,j} d\Omega, \quad (1.3.19)$$

При $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$, $u_3 = 0$ получим формулы для плоского напряженного состояния (балка-стенка).

При $u_3 = 0$ рассматривается также плоская деформация - вместо гипотезы $\sigma_{33} = 0$ предполагается $\varepsilon_{3,3} = 0$. Зависимости для плоской деформации совпадают с формулами плоского напряженного состояния, кроме (1.3.3) - связи между деформациями и напряжениями. Для плоской деформации такую формулу получаем из (1.1.3) при $\varepsilon_{3,3} = 0$, т.е.

$$\sigma_{i,j} = G \left[\varepsilon_{i,j} + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{2,2}) \right]. \quad (1.3.20)$$

Распределение температуры по толщине оболочки предполагается линейным,

$$T(x) = T_0 - x_3 T_1, \quad (1.3.21)$$

поэтому при учете температурных воздействий в формулу для $l(u)$ добавляется слагаемое

$$- \frac{cE\delta}{1-\mu} \int_{\Omega} \left[(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0) T_0 + \frac{\delta^2}{12} T_1 \Delta u_3 \right] d\Omega. \quad (1.3.22)$$

Теория оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа, использует зависимости (1.3.8) для поворотов

$$\alpha_1 = u_{3,2}, \quad \alpha_2 = -u_{3,1}. \quad (1.3.23)$$

Эта теория справедлива для тонких оболочек. Отказ от соотношений (1.3.23) приводит к теории толстых оболочек Рейснера [2], [54].

Представим перемещения в виде, аналогичном (1.3.1):

$$\begin{aligned} U_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1 + x_3 \alpha_2, \\ U_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2 - x_3 \alpha_1, \\ U_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3, \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

где функции $u_1, u_2, u_3, \alpha_1, \alpha_2$ зависят только от x_1, x_2 .

Обозначим

$$\chi_{11} = \alpha_{22}, \quad \chi_{22} = -\alpha_{11}, \quad \chi_{1,2} = \chi_{2,1} = (\alpha_{2,2} - \alpha_{1,1})/2. \quad (1.3.25)$$

Тогда деформации, напряжения, усилия и моменты при $i, j=1,2$ определяются формулами (1.3.2) – (1.3.6).

Кроме того, отличны от нуля сдвиговые деформации и напряжения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,3} = \varepsilon_{3,1} &= (u_{3,1} + \alpha_2)/2, & \delta_{1,3} = \delta_{3,1} &= G \varepsilon_{1,3}; \\ \varepsilon_{2,3} = \varepsilon_{3,2} &= (u_{3,2} - \alpha_1)/2, & \delta_{2,3} = \delta_{3,2} &= G \varepsilon_{2,3}. \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

Из (1.3.26) получим, что

$$N_{i,3} = N_{3,i} = G \delta \varepsilon_{i,3} = G \delta \varepsilon_{3,i}.$$

В выражение (1.3.9) для работы внутренних сил добавляется слагаемое

$$a_G(u, u) = \int_{\Omega} (N_{i,3} \varepsilon_{i,3} + N_{3,i} \varepsilon_{3,i}) d\Omega. \quad (1.3.27)$$

Формулы (1.3.10) - (1.3.14) для толстых оболочек сохраняются.

Вектор-функция перемещений для толстых оболочек имеет размерность 5, $u = (u_1, u_2, u_3, \alpha_1, \alpha_2)$, энергетическая норма определяется из (1.3.9), (1.3.27), она удовлетворяет неравенству вида (1.3.18)

$$a(u, u) \leq K \left(\|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_1^2 + \|u_3\|_1^2 + \|\alpha_1\|_1^2 + \|\alpha_2\|_1^2 \right).$$

Энергетическим пространством здесь является множество функций $u_k, k=1,2,3; \alpha_i, i=1,2$, удовлетворяющих главным граничным условиям и принадлежащих пространству $H^1(\Omega)$.

Метод конечных элементов для линейной статической задачи

Математическая постановка

Метод конечных элементов использует принцип возможных перемещений (1.1.10)

$$a(u, v) + l(v) = 0,$$

где действительное перемещение u и любое возможное перемещение v определены на области Ω и принадлежат энергетическому пространству V .

Область Ω разбивается на конечные элементы Ω_r , которые, в зависимости от размерности Ω , являются отрезками, выпуклыми многоугольниками или многогранниками, Γ – граница Ω . Предполагается, что $\Omega = \bigcup_r \Omega_r$, т.е. область Ω является объединением

отрезков, многоугольников и многогранников. Узлами X_j конечно-элементной сетки являются вершины многогранников, многоугольников и отрезков.

Разбиение на конечные элементы предполагается согласованным – каждая вершина или ребро любого конечного элемента либо принадлежит границе области, либо является вершиной или ребром другого конечного элемента.

Узловыми неизвестными (степенями свободы) $L_k(u)$ являются линейные функционалы, носители которых обозначим $S_k = \text{supp } L_k(u)$.

Функционалы $L_k(u)$ предполагаются линейно-независимыми, т.е. для любой $u \in V$, $u \neq 0$ из равенства $\alpha_k L_k(u) = 0$ следует, что все $\alpha_k = 0$.

Обычно степенями свободы являются значения в узлах:

- перемещений u_1, u_2, u_3 для трехмерных областей;
- перемещений u_1, u_2, u_3 и поворотов α_1, α_2 для оболочек;
- перемещений u_1, u_2, u_3 и поворотов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ для стержней.

Отсутствие поворотов для объемной задачи и поворота α_3 для оболочек объясняется тем, что эти величины не являются непрерывными на поверхностях (для объемов) или линиях (для оболочек).

Звездой элементов Ω^k , соответствующей функционалу $L_k(u)$, называется объединение всех элементов Ω_r , содержащих $S_k = \text{supp } L_k(u)$. Поскольку обычно S_k совпадает с одним из узлов, часто Ω^k называют звездой элементов узла.

Для элемента Ω_r обозначим $\alpha_r(u, v)$ и $l_r(v)$ возможные работы внутренних и внешних сил по области Ω_r , определенные по формулам (1.1.4), (1.1.6) для трехмерного КЭ или (1.2.16), (1.2.17) для стержневого КЭ, (1.3.12), (1.3.14) для КЭ оболочки. Тогда

$$a(u, v) = \sum_r a_r(u, v), \quad l(v) = \sum_r l_r(v). \quad (2.1.1)$$

В дальнейшем все величины, получаемые интегрированием по Ω , будем представлять аналогично (2.1.1) как суммы интегралов по Ω_r .

Для каждого функционала $L_k(u)$ вводятся базисные функции $\mu_k(x)$, отличные от нуля только на Ω^k ($\text{supp } \mu_k = \Omega^k$), удовлетворяющие равенствам

$$L_k(\mu_j) = \delta_{k,j}. \quad (2.1.2)$$

Существование функций μ_k , удовлетворяющих (2.1.2) следует из линейной независимости функционалов L_k .

Из (2.1.2) следует, что функции μ_k линейно независимы.

МКЭ называется конформным (совместным), если все функции μ_k принадлежат энергетическому пространству V , и неконформным (несовместным), если какая-либо из базисных функций не принадлежит V .

Обозначим S – размерность вектор-функции u , m_q – наибольший порядок производной, с которой u_q входит в функционал потенциальной энергии $a(u, u)$. Таким образом:

- для трехмерной задачи $s=3, m_1=m_2=m_3=1$;
- для стержней $s=4, m_1=m_4=1, m_2=m_3=2$;
- для плоской задачи $s=2, m_1=m_2=1$;
- для тонких оболочек $s=3, m_1=m_2=1, m_3=3$;
- для тонких плит $s=1, m_1=2$;
- для толстых оболочек $s=5, m_1=\dots=m_5=1$;
- для толстых плит $s=3, m_1=m_2=m_3=1$.

Тогда для проверки соотношения $\mu \in V$ достаточно проверить включение $\mu_k \in H^{\mu_q}(\Omega)$, причем

$$1 \leq \mu_q \leq 2, \quad 1 \leq q \leq S. \quad (2.1.3)$$

Вопрос о принадлежности функции φ , заданной на звезде элементов, пространству H^k , $1 \leq k \leq 1$, решает доказанная в [59] теорема.

Пусть $\varphi \in C_1(\Omega_r)$ при всех r , тогда $\varphi \in H^1$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in C(\Omega)$.

Пусть $\varphi \in C_2(\Omega_r)$ при всех r , тогда $\varphi \in H^2$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in C_1(\Omega)$.

Из приведенной теоремы и равенств (2.1.2) сразу следует конформность базисных функций стержневого элемента.

Для двух- и трехмерных конечных элементов, базисные функции являются обычно многочленами, т.е. бесконечно-дифференцируемы на каждом отдельном конечном элементе. Поэтому

- при $m_q=1$ достаточно проверить включение $\mu_q \in C(\Omega)$, т.е. непрерывность на границе Ω_r ;

- при $m_q=2$ достаточно проверить включение $\mu_q \in C_1(\Omega)$, т.е. непрерывность на границе Ω_r функции μ_q и ее нормальной производной.

Проверка непрерывности для базисных функций, являющихся многочленами на каждом КЭ, обычно выполняется следующим образом.

Пусть Ω_1 и Ω_2 – два конечных элемента, имеющих общую грань или ребро $\Gamma_{1,2}$. Обозначим $L_{1,2}$ множество функционалов L_k , носители которых содержатся в $\Gamma_{1,2}$. Для исследуемой базисной функции μ обозначим φ_1 и φ_2 ее значения на $\Gamma_{1,2}$, полученные из Ω_1 и Ω_2 .

При $m_q=2$, рассмотрим аналогичные значения производных по нормали к $\Gamma_{1,2}$ – $\varphi_{v,1}$ и $\varphi_{v,2}$.

Если функция μ задана явно, то непосредственно проверяются равенства $\varphi_1=\varphi_2$, а при $m_q=2$ еще и равенства $\varphi_{v,1}=\varphi_{v,2}$ на $\Gamma_{1,2}$.

При неявном задании базисных функций используется следующая очевидная теорема:

Равенство $\varphi_1=\varphi_2$ на $\Gamma_{1,2}$ имеет место, если функции φ_1 и φ_2 являются многочленами одинаковой степени на $\Gamma_{1,2}$ и коэффициенты этого многочлена однозначно определяются значениями функционалов из $L_{1,2}$.

Так, например, многочлен степени 1 на отрезке однозначно определяется своими значениями в начале и конце отрезка; многочлен степени 1 на треугольнике однозначно определяется своими значениями в вершинах треугольника; многочлен степени 3 на отрезке однозначно определяется значениями функции и производной (по направлению этого отрезка) в начале и конце.

Таким образом устанавливается конформность известных конечных элементов плоской задачи теории упругости (треугольник, прямоугольник) и трехмерной задачи (тетраэдр, прямая треугольная призма, прямоугольный параллелепипед), а также изопараметрических элементов.

Обозначим V_μ множество линейных комбинаций базисных функций вида

$$u_h(x) = \sum_k d_k \mu_k(x), \quad (2.1.4)$$

где d_k – числа, удовлетворяющие в узлах, лежащих на Γ_u , заданным на Γ_u граничным условиям.

Уравнения МКЭ записываются в форме, аналогичной принципу возможных перемещений: найти $u_h \in V_\mu$, удовлетворяющую при всех $v_h \in V_\mu$ равенствам

$$a(u_h, v_h) + l(v_h) = 0. \quad (2.1.5)$$

Поскольку функции μ_k линейно-независимы, из (2.1.4) следует, что равенства (2.1.5) будут выполнены при любом $v_h \in V_\mu$, если они справедливы при всех μ_k . Подставив u_h в виде (2.1.4) в (2.1.5), получим систему линейных уравнений МКЭ относительно неизвестных d_k :

$$\sum_k d_k a(\mu_k, \mu_j) + l(\mu_j) = 0. \quad (2.1.6)$$

Здесь индексы k, j изменяются от 1 до L – общего количества функционалов L_k – размерности пространства V_μ .

Матрица A с элементами $A_{k,j}=a(\mu_k, \mu_j)$ называется матрицей жесткости, вектор с элементами $l(\mu_j)$ – вектором правых частей.

Из (2.1.1) получаем

$$a(\mu_k, \mu_j) = \sum_r a_r(\mu_k, \mu_j), \quad (2.1.7)$$

$$l(\mu_j) = \sum_r l_r(\mu_j). \quad (2.1.8)$$

Очевидно, что для элемента Ω_r отличны от нуля только те слагаемые из (2.1.7), для которых и μ_k и μ_j отличны от нуля на Ω_r , и только те слагаемые из (2.1.8), для которых μ_j отличны от нуля на Ω_r .

Матрица k_r с элементами

$$k_{r,i,j} = a_r(\mu_k, \mu_j), \quad \mu_k \neq 0, \mu_j \neq 0 \text{ на } \Omega_r \quad (2.1.9)$$

называется матрицей жесткости элемента Ω_r , вектор q_r с элементами

$$q_{r,j} = l_r(\mu_j), \quad \mu_j \neq 0 \text{ на } \Omega_r \quad (2.1.10)$$

называется вектором правых частей элемента Ω_r .

Таким образом, матрица жесткости и вектор правых частей в (2.1.7), (2.1.8) получены суммированием матриц жесткости и векторов правых частей отдельных конечных элементов.

Естественно, в вектор правых частей добавляются нагрузки, не связанные с элементами, а заданные непосредственно в узлах.

Отметим, что матрицу жесткости и вектор правых частей удобно строить в системе координат, связанной с элементом. Эта система называется местной.

Для преобразования векторов и матриц из местной системы в общую и обратно, используется матрица, составленная из координат единичных векторов местной системы, матрица косинусов.

Изложенный достаточно простой метод построения системы уравнений МКЭ (2.1.7), основанный на том, что большинство вычислений выполняется независимо на каждом отдельном конечном элементе, является одним из основных алгоритмических преимуществ МКЭ.

Вторым существенным преимуществом МКЭ является способ удовлетворения граничным условиям на Γ_u . Из (2.1.4) и (2.1.2) следует равенство

$$L_j(u_k) = d_j, \quad (2.1.11)$$

поэтому для удовлетворения в глобальной или локальной системе граничному условию $L_j(u)=0$ достаточно положить в (2.1.4) и, естественно, далее, $d_j=0$, то есть, не учитывать соответствующее неизвестное при построении и решении системы (2.1.6).

Основные теоремы о сходимости МКЭ

Обозначим h_r наибольшее расстояние между вершинами КЭ Ω_r , и

$$h = \max_r \{h_r\}.$$

Метод конечных элементов называют сходящимся, если справедливо равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_v \rightarrow 0,$$

где u , u_h – точное решение задачи из (1.1.10) и решение, полученное методом конечных элементов из (2.1.15).

Здесь и далее будем предполагать, что при всех $v \in V$ выполнено неравенство (1.1.9)

$$|l(v)| \leq k \|u\|_v \quad \text{и что выполнено равенство (2.1.2)} \quad L_k(\mu_j) = \delta_{k,j}.$$

Напоминаем, что все рассматриваемые нормы и другие величины, определяемые интегрированием по Ω , понимаются как суммы интегралов по Ω_r .

В соответствии с общей теорией, для доказательства сходимости МКЭ требуется установить, что при $h \rightarrow 0$

Уравнение МКЭ приближает соответствующее точное уравнение – условие аппроксимации.

Энергетические нормы решений u_h уравнений МКЭ ограничены – условие устойчивости.

Введем мультииндекс m размерности s с целыми неотрицательными компонентами μ_q , равными наибольшему порядку производной, с которой функция u_q ($1 \leq q \leq s$) входит в функционал потенциальной энергии $\alpha(u, u)$.

Для целого числа τ введем норму в пространстве $H_{m+\tau}$

$$\|u\|_{m+\tau}^2 = \|u_q\|_{m_q+\tau}^2 \quad - \quad (2.2.1)$$

сумму норм в пространствах С.Л.Соболева $H_{m_q+\tau}$

Из неравенств (1.1.6), (1.2.19), (1.3.20) следует, что величина $\|u\|_m = \|u\|_{m+0}$ эквивалентна энергетической норме $\|u\| = \sqrt{\alpha(u, u)}$, т.е. для всех $u \in V$ справедливо неравенство

$$k_1 \|u\|_m \leq \|u\| \leq k_2 \|u\|_m, \quad k_1, k_2 > 0. \quad (2.2.2)$$

Скалярное произведение для вектор-функций u и v размерности s определим формулой

$$(u, v)_m = \int_{\Omega} (u_q(x), v_q(x))_{m_q} dx, \quad (2.2.3)$$

где

$$(u_q, v_q)_{m_q} = \sum_{|i| \leq m_q} \int_{\Omega} D^i u_q D^i v_q dx \quad - \quad \text{скалярное произведение в } H_{m_q}. \quad (2.2.4)$$

Для мультииндекса i размерности n будем обозначать

$$|i| = i_1 + \dots + i_n,$$

$$\alpha i = (\alpha i_1, \dots, \alpha i_n), \quad \alpha > 0.$$

$$x^I = x_1^{I_1} \cdot \dots \cdot x_n^{I_n}, \quad x \in R^n.$$

Вектор-функцию $(x^{J_1}, \dots, x^{J_s})$, где $x \in R^n$, J_q – мультииндексы размерности n , будем обозначать X^j .

Будем предполагать, что при некотором $\tau_l > 0$, $\tau_l < m_q$, $1 \leq q \leq s$, справедливо неравенство

$$|I(v)| \leq k \|v\|_{m-\tau_l}. \quad (2.2.5)$$

Тогда работа внешних сил является ограниченным линейным функционалом в $H_{m-\tau_1}$, и по теореме Ф.Рисса, существует единственный элемент $u_0 \in H_{m-\tau_1}$, удовлетворяющий при всех $v \in H_{m-\tau}$ равенству

$$I(v) = (u_0, v)_{m-\tau_1}. \quad (2.2.6)$$

Задачу (1.1.10) с учетом (2.2.6) запишем в виде

$$a(u, v) + (u_0, v)_{m-\tau_1} = 0. \quad (2.2.7)$$

Будем предполагать также, что выполнено условие регулярности: для решения u задачи (2.2.7) справедливо неравенство

$$\|u\|_{m+\tau_1} \leq k \|u_0\|_{m-\tau_1}. \quad (2.2.8)$$

Для задач изгиба стержней и пластин $1 \leq \tau_l \leq 2$, для остальных рассмотренных задач $\tau_l = 1$.

Из теорем вложения следует, что для всех рассмотренных в разделе 2.1 функционалов L_k справедливо при $\tau_l = 1$ неравенство

$$|L_k(u)| \leq k \|u\|_{m+\tau_1}.$$

Это неравенство позволяет для функций, удовлетворяющих (2.2.8), корректно определить интерполирующую функцию

$$R_{\mu} u = L_k(u) \mu_k \in V_{\mu}, \quad (2.2.9)$$

которая будет использоваться при проверке условия аппроксимации.

Теорема 1. (критерий полноты)

Пусть при некотором $\tau > 0$ выполнены равенства

$$L_k(x^j) \mu_k = x^j, \quad |j_q| \leq m_q + \tau - 1, \quad 0 \leq \tau \leq m_q, \quad 1 \leq q \leq s. \quad (2.2.10)$$

Тогда при всех t_1, t_2 , таких, что $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \tau$, для функции $R_{\mu} u$ справедливо неравенство

$$\|u - R_{\mu} u\|_{m-t_1} \leq k h^{\tau} \|u\|_{m+t_2-t_1}. \quad (2.2.11)$$

Доказательство приведено в [33, 59].

Равенства, аналогичные (2.2.10), предложены в [46, 49], где они названы соответственно, фундаментальными соотношениями и m -критерием, и в [33].

Равенства (2.2.10) могут проверяться непосредственно, если функции m_q заданы явно, либо с помощью следующего утверждения:

Лемма 1. Если множество V_{μ} содержит все вектор-функции, компоненты которых – многочлены степени $m_q + \tau - 1$, то равенства (2.2.10) выполнены.

Доказательство. Из условия леммы следует, что для всех j , таких, что $|j_q| \leq m_q + \tau - 1$, существуют числа d_j, k , удовлетворяющие равенству

$$x^j = d_{j,k} \mu_k. \quad (2.2.12)$$

Применив функционал L_k , и, воспользовавшись (2.1.2), получим

$$L_k(x^j) = d_{j,k} L_k(\mu_k) = d_{j,k} d_{k,k} = d_{j,k}. \quad (2.2.13)$$

Подставив (2.2.13) в (2.2.12), получим (2.2.10).

Из неравенства треугольника

$$\|u - u_h\|_m \leq \|u - R_{\mu} u\|_m + \|R_{\mu} u - u_h\|_m \quad (2.2.14)$$

и (2.1.2) следует, что достаточно изучать разность $u_h - R_\mu u$.

Для решения задачи (1.1.10) и $v \in V \cup V_\mu$ положим

$$G(u, v) = a(u, v) + l(v). \quad (2.2.15)$$

Аналогично, для решения задачи (2.2.7) при $u_0 = u - u_h$ и $v \in V \cup V_\mu$ положим

$$G_0(w, v) = a(w, v) - (u - u_h, v). \quad (2.2.16)$$

Из (1.1.10), (2.2.6) и уравнения МКЭ (2.1.5) получим при всех $v_h \in V_\mu$:

$$a(u_h - R_\mu u, v_h) = a(u - R_\mu u, v_h) + G(u, v_h), \quad (2.2.17)$$

$$\begin{aligned} (u - u_h, u - u_h) &= a(w - R_\mu w, u - u_h) + G(u, R_\mu w) + \\ &+ G_0(w, R_\mu u) + G_0(w, u_h - R_\mu u). \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Формула (2.2.17) соответствует второй лемме Стренга [72], формула (2.2.18) - лемме Обена-Нитше [59].

Равенство (2.2.17) – аппроксимационное, равенство (2.2.18) используется для получения погрешности в норме L_2 .

Отметим, что в конформном случае $V_h \subset V$, поэтому $G(u, w) = G_0(u, w) = 0$ при всех $v \in V$.

Теорема 2. Пусть все $\mu_k \in V$ и выполнены равенства (2.2.10) при $\tau = \tau_1$. Тогда существует единственное решение u_h системы уравнений МКЭ (2.1.5), справедливо неравенство устойчивости

$$\|u_h\|_V \leq k \quad (2.2.19)$$

и оценки погрешности

$$\|u - u_h\|_V \leq k h^{\tau_0} \|u\|_{m+\tau_1}, \quad \tau_0 = \tau_1; \quad (2.2.20)$$

$$\|u - u_h\|_0 \leq k h^{2\tau_1} \|u\|_{m+\tau_1}. \quad (2.2.21)$$

Доказательство [59]. Существование и единственность решения следуют из линейной независимости функций и неравенства (2.2.2).

Положив в (2.1.5) $v_h = u_h$, получим

$$a(u_h, u_h) = -l(u_h) \leq k \|u\|_V. \quad (2.2.22)$$

Сократив на $\|u\|_V$, получим (2.2.19).

Положим в (2.2.17) (при $G(u, v_h)=0$) $v_h=u_h-R_\mu u$ и применим неравенство Буняковского. Тогда

$$\|u_h - R_\mu u\|_V^2 \leq \|u - R_\mu u\|_V^2 \|u_h - R_\mu u\|_V. \quad (2.2.23)$$

Сократив на $\|u_h - R_\mu u\|_V$, применив (2.2.11) при $t_1=0$, $t_2=\tau_l$, а затем неравенство треугольника (2.2.14), получим (2.2.20).

В правой части равенства (2.2.18) применим неравенство Буняковского. Тогда

$$\|u - u_h\|_0^2 \leq \|w - R_\mu w\|_V \|u - u_h\|_V. \quad (2.2.24)$$

Первый сомножитель в правой части (2.2.24) оценивается из неравенства (2.2.11) при $t_1=0$, $t_2=\tau_l$, второй – из (2.2.20):

$$\|u - u_h\|_0^2 \leq k h^{2\tau} \|w\|_{m+\tau_1} \|u\|_{m+\tau_1}. \quad (2.2.25)$$

Применив неравенство (2.2.8) при $u_0=u-u_h$ и сократив на $\|u - u_h\|_0$, получим (2.2.21).

Неравенство (2.2.20) называют энергетической оценкой погрешности, неравенство (2.2.21) – оценкой погрешности по перемещениям, в норме L_2 .

Для доказательства аналогичной теоремы в неконформном случае требуется установить неравенство (2.2.2) для $u_h \in V_\mu$, поскольку v_h уже не принадлежит V , и оценить величины $G(u, v_h)$, а также $G(u, R_\mu w)$, $G(w, R_\mu u)$ и $G(w, u_h - R_\mu u)$.

Излагаемый ниже метод основан на построении конформного базиса λ_k , энергетически «близкого» к неконформному базису μ_k [17], [18].

Предположим, что существует конформный базис λ_k , удовлетворяющий тем же равенствам (2.1.2), что и функции μ_k , т.е. $L_k(\lambda_j) = \delta_{k,j}$, а также равенствам (2.2.10).

Обозначим конформную интерполяционную функцию

$$R_\lambda u = L_k(u) \lambda_k.$$

Из (2.1.2) для функции $u_h = d_k \mu_k$ получим

$$L_k(u_h) = d_k,$$

поэтому

$$R_\lambda u_h = d_k \lambda_k,$$

$$u_h - R_\lambda u_h = d_k(\mu_k - \lambda_k). \quad (2.2.26)$$

Из неравенств (1.1.6) при $t_1=t_2$ получим

$$\|u_h - R_\lambda u_h\|_{m-t_2} \leq k h^{t_2} \|u_h\|_{m_1}. \quad (2.2.27)$$

Из очевидного равенства $u_h = R_\mu(R_\lambda u_h)$ и (2.2.11) получаем аналогичное (2.2.27) неравенство

$$\|u_h - R_\lambda u_h\|_{m-t_2} \leq k h^{t_2} \|R_\lambda u_h\|_m. \quad (2.2.28)$$

Неравенства (2.1.2), (2.1.2) будут использоваться при $t=0$ и при $t_2=\tau_1$.

Рассмотрим далее разность $R_\mu u - R_\lambda u = L_k(u)(\mu_k - \lambda_k)$. Представив ее в виде $(R_\mu u - u) + (u - R_\lambda u)$, применив неравенство треугольника и неравенство (2.2.11) при $t_1=0$, получим

$$\|R_\mu u - R_\lambda u\|_v \leq k h^{t_2} \|u\|_{m+t_2}. \quad (2.2.29)$$

Из (2.2.28) при $t_2=0$ получаем, что неравенство (2.2.2) справедливо и для u_h , откуда, как и в конформном случае, получаем существование и единственность решения системы (2.1.5) и неравенство устойчивости (2.2.19). Для получения оценок погрешности воспользуемся вытекающими из конформности базиса λ_k равенствами

$$G(u, v_h) = G(u, u_h - R_\lambda u_h),$$

$$G(u, R_\mu w) = G(u, R_\mu w - R_\lambda w),$$

$$G_0(w, R_\mu u) = G_0(w, R_\mu u - R_\lambda u),$$

$$G_0(w, R_\mu u) = G_0(w, R_\mu u - R_\lambda u),$$

$$G_0(w, u_h - R_\mu u) = G_0(w, u_h - R_\mu u - R_\lambda(u_h - R_\mu u)). \quad (2.2.30)$$

Для получения энергетической оценки погрешности вида (2.2.20) оценим

$$G(u, u_h - R_\lambda u_h) = a(u, u_h - R_\lambda u_h) + l(u_h - R_\lambda u_h). \quad (2.2.31)$$

Из неравенств (2.2.5) и (2.2.27) получаем

$$|l(u_h - R_\lambda u_h)| \leq k h^{t_2} \|u_h\|_m. \quad (2.2.32)$$

Для оценки $a(u, u_h - R_\lambda u_h)$ нужно ввести дополнительное предположение — условие «компенсации неконформности»:

на каждом элементе Ω_τ при, $|j_q| \leq m_q + \tau_2 - 1, 0 < \tau_2 < m_q$ выполнены равенства

$$a_r(x^j, \mu_k - \lambda_k) = 0. \quad (2.2.33)$$

Тогда для вектор-функции P , каждая компонента которой P_q является многочленом степени $m_q + \tau_2 - 1$, справедливо равенство

$$a(u, u_h - R_\lambda u_h) = a(u - P, u_h - R_\lambda u_h). \quad (2.2.34)$$

Выбирая в качестве P_q отрезок ряда Тейлора функции u_q , получим из (2.2.33), что

$$|a(u, u_h - R_\lambda u_h)| \leq k h^{\tau_2} \|u\|_{m+\tau_2}. \quad (2.2.35)$$

Остальные величины из (2.2.30) оцениваются аналогично. Например,

$$G(u, R_\mu w - R_\lambda w) = a(u - P, R_\mu w - R_\lambda w) + l(R_\mu w - R_\lambda w).$$

Применив (2.2.8) и (2.2.29), получим неравенства

$$\begin{aligned} |a(u - P, R_\mu w - R_\lambda w)| &\leq k h^{\tau_2 + \tau_3} \|u\|_{m+\tau_2} \|w\|_{m+\tau_2}, \\ |l(R_\mu w - R_\lambda w)| &\leq k h^{\tau_1 + \tau_2} \|w\|_{m+\tau_2}. \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

Применим, как и при доказательстве теоремы 1, равенства (2.1.5), (2.2.17), (2.2.18) и воспользуемся (2.2.32), (2.2.35), (2.2.36) и (2.2.8). Таким образом доказана **Теорема 3.** Пусть в неконформном случае функции μ_k удовлетворяют равенствам (2.2.10) при $\tau = \tau_j$; существует конформный базис λ_k , удовлетворяющий равенствам (2.2.10) при $\tau = \tau_3 \leq \tau_j$ и равенствам (2.2.33) при $\tau_2 \leq \tau_1$.

Тогда существует единственное решение u_h системы МКЭ (2.1.5), справедливы неравенство устойчивости (2.2.19), энергетическая оценка погрешности

$$\|u - u_h\|_v \leq k h^{\tau_0} \|u\|_{m+\tau_0}, \quad \tau_0 = \tau_2 \quad (2.2.37)$$

и оценка погрешности по перемещениям

$$\|u - u_h\|_0 \leq k h^{\tau_2 + \tau_3} \|u\|_{m+\tau_1}. \quad (2.2.38)$$

Таким образом, установлены достаточные условия сходимости МКЭ в конформном и неконформном случаях – равенства (2.2.10) и (в неконформном случае) – (2.2.33).

Эти равенства проверяются на каждом отдельном конечном элементе.

Применение доказанных теорем для исследования сходимости известных элементов и построения новых неконформных элементов будет продемонстрировано в следующих разделах.

В ряде случаев, например, при расчете криволинейных стержней и оболочек прямолинейными и плоскими элементами, а также при применении численного

интегрирования для построения матриц жесткости и векторов правых частей, возникает дополнительная погрешность МКЭ, связанная с тем, что выражения для возможных работ $a(u, v)$, $l(v)$ заменяются приближенными $a_h(u, v)$, $l_h(v)$. Справедлива

Теорема 4. (первая лемма Стренга). Пусть для всех $u_h, v_h \in V_h$ справедливы неравенства

$$|a(u_h, v_h) - a_h(u_h, v_h)| \leq k h^{\tau_3} \|u_h\|_m \|v_h\|_m, \quad (2.2.39)$$

$$|l(v_h) - l_h(v_h)| \leq k h^{\tau_4} \|v_h\|_m, \quad 0 < \tau_4 \leq \tau_2$$

и выполнены условия теоремы 2 или теоремы 3.

Тогда справедливы оценки погрешности

$$\|u - u_h\|_v \leq k h^{\tau_3} \|u_h\|_{m+\tau_1}, \quad (2.2.40)$$

$$\|u - u_h\|_0 \leq k h^{\tau_4} \|u_h\|_{m+\tau_1}.$$

Доказательство приведено в [59].

Неравенства (2.2.39) при $\tau_4=1$ доказаны в [21, 76] для прямолинейных элементов при расчете криволинейных стержней и в [22] для плоских прямоугольных элементов цилиндрической оболочки и треугольных элементов произвольной оболочки.

Исследование неравенств вида (2.2.39) для численного интегрирования приведено в [59]. Отметим здесь, что если при численном интегрировании использовать квадратурные формулы, точные для полиномов, используемых при построении матриц жесткости и векторов правых частей (как и сделано в ПК ЛИРА), то погрешность численного интегрирования равна нулю.

Конечные элементы для линейной статической задачи

В соответствии с терминологией, принятой в [59], описание конечного элемента должно содержать:

- а) задачу, для решения которой он предназначен;
- б) область $\Omega \subset R^n$, занимаемую конечным элементом;
- с) множество L его узловых неизвестных (функционалов L_k);
- д) множество V линейных комбинаций его базисных функций.

Поскольку каждая компонента u_q вектора перемещений $u = (u_1, \dots, u_s)$ аппроксимируется независимо, будем рассматривать множества L_q и V_q для этих перемещений.

Обозначим a_i - вершины конечного элемента Ω , P_k - множество многочленов степени k на Ω .

Для двух- и трехмерных элементов обозначим: Γ_j - сторона или грань, не содержащая a_j ; b_j - центр тяжести Γ_j ; $\delta_{v,j}$ - производная по нормали к Γ_j ; a - центр тяжести треугольника Ω или точка пересечения диагоналей четырехугольника Ω ; Ω_j - треугольник, две вершины которого - вершины Γ_j , третья - точка a ; Q_k - множество многочленов степени k по каждой переменной; P - элемент из V_q .

Матрица жесткости и вектор нагрузок конечного элемента вычисляются по формулам (2.1.9), (2.1.10).

Конечный элемент стержня

Область $\Omega \in R^1$ - отрезок с вершинами a_1, a_2 длины l ;

$L_1 = \{u_1(a_i)\}$, $V_1 = P_1$ - перемещения вдоль оси стержня;

$L_4 = \{\alpha_1(a_i)\}$, $V_4 = P_1$ - поворот вокруг оси стержня;

$L_2 = \{u_2(a_i), \alpha_3(a_i)\}$, $V_2 = P_3$,

$L_3 = \{u_3(a_i), \alpha_2(a_i)\}$, $V_3 = P_3$ - изгибные перемещения.

Аппроксимация перемещений имеет вид

$$u_1(x) = u_1(a_i), h_i(x),$$

$$\alpha_1(x) = \alpha_1(a_i), h_i(x),$$

$$u_2(x) = u_2(a_i) \mu_i(x) + \alpha_3(a_i) \lambda_i(x) = 0,$$

$$u_3(x) = u_3(a_i) \mu_i(x) - \alpha_2(a_i) \lambda_i(x) = 0. \quad (2.3.1)$$

Базисные функции задаются явно:

$$h_1(x) = 1 - s, \quad h_2(s) = s, \quad (2.3.2)$$

$$\mu_1(x) = 1 - 3s^2 + 2s^3, \quad \mu_2(x) = 3s^2 - 2s^3,$$

$$\lambda_1(x) = l(s - 2s^2 + s^3), \quad \lambda_2(x) = l(-s^2 + s^3), \quad s = \frac{x}{l}. \quad (2.3.3)$$

При учете касательных напряжений от изгиба (учет сдвига) базисные функции μ_i, λ_i корректируются в соответствии с формулами (1.2.14) для поворотов α_3, α_2 .

Функции (2.3.2), (2.3.3) конформны, функции h удовлетворяют условиям теоремы 1 при $\tau=1$, функции μ, λ удовлетворяют условиям теоремы 1 при $\tau=3$.

Кроме того, функции (2.3.2), (2.3.3), и только они, удовлетворяют соответствующим однородным уравнениям равновесия.

Поэтому при отсутствии распределенных нагрузок упругого основания и предварительного натяжения аппроксимация (2.3.1) – (2.3.3) позволяет получить точное решение задачи. При наличии распределенных нагрузок полученные усилия корректируются на величины q_{rj} в соответствии с (2.1.10).

Матрица жесткости и вектор нагрузок корректируются при наличии шарниров жордановыми исключениями, при наличии жестких вставок – при помощи матрицы, соответствующей перемещениям без деформаций.

Конечные элементы плоской и объемной задач и толстой плиты

Область Ω - треугольник или четырехугольник для плоской задачи или толстой плиты, треугольная пирамида, треугольная призма или шестигранник с четырехугольными гранями – для трехмерной задачи.

Степенями свободы являются перемещения в вершинах, $L_q = \{u_q(a_i)\}$

- 1) Треугольник и треугольная пирамида: $V_q = P_1$;
- 2) Прямоугольник и прямоугольная пирамида: $V_q = Q_1$;
- 3) Прямая треугольная призма: $V_q = P_1(x_1, x_2) * P_1(x_3)$.

Базисные функции элементов 1 – 3 строятся в явном виде. Для элементов 1 - это барицентрические координаты точки x в Ω , для элементов 2 – произведения функций (2.3.2), для элемента 3 – произведения базисных функций треугольника и функций (2.3.2).

Базисные функции элементов 2 и 3 позволяют задать преобразования: прямоугольника - в произвольный четырехугольник, прямоугольного параллелепипеда - в шестигранник с четырехугольными гранями, прямой треугольной призмы – в произвольную треугольную призму. Если якобиан такого преобразования отличен от нуля всюду в Ω , получаем изопараметрические элементы:

- 4) Соответствующие элементам 2;
- 5) Соответствующие элементам 3.

Элементы 1 - 5 конформны и удовлетворяют условиям теоремы 1 при $\tau=1$.

- 6) Неконформный прямоугольник и прямоугольный параллелепипед (элементы Вильсона):

$$V_q = Q_1 + p_2(x), \quad p_2(x) \in P_2, \quad p_2(a_i) = 0;$$

- 7) Неконформный треугольник и треугольная пирамида:

$$V_q = P_1, \quad L_q = \{u_q(b_i)\}.$$

Базисные функции элементов 6 и 7 также удовлетворяют условиям теоремы 1 при $\tau=1$.

Функции $p_2(x)$ для элемента 6 вычисляются явно, непосредственной проверкой устанавливаются равенства

$$\int_{\Omega} \partial_i p_2(x) dx = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

поэтому сходимость элемента 6 следует из теоремы 3.

Сходимость элемента 7 доказана в [61]. Элемент 7 применяется в задачах гидромеханики.

Отметим, что для рассмотренных выше задач конформные элементы легко строились при естественном наборе степеней свободы, т.к. для конформности достаточно непрерывности перемещений на границе.

Конечные элементы тонкой изгибаемой плиты

Приведем вначале конформные элементы:

8) Прямоугольник Богнера-Фокса-Шмита:

$$L = \{u(a_i), u_{,1}(a_i), u_{,2}(a_i), u_{,12}(a_i)\}, V = Q_3;$$

9) Треугольник Аргириса:

$$L = \{u(a_i), u_{,j}(a_i), u_{,j,k}(a_i), \partial_{v,j}(b_i)\}, V = P_5;$$

10) Треугольник Белла:

$$L = \{u(a_i), u_{,j}(a_i), u_{,j,k}(a_i)\},$$

$$V = \{p \in P_5, \partial_{v,j} p \in P_3(\Gamma_i)\};$$

11) Треугольник Клафа-Точера:

$$L = \{u(a_i), u_{,j}(a_i), \partial_{v,j}(b_i)\},$$

$$V = \{p \in P_3(\Omega_i), p \in C^1(\Omega)\};$$

12) Приведенный треугольник Клафа-Точера:

$$L = \{u(a_i), u_{,j}(a_i)\},$$

$$V = \{p \in P_3(\Omega_i), p \in C^1(\Omega), \partial_{v,j} p \in P_1(\Gamma_i)\};$$

Базисные функции элемента 8 являются попарными произведениями функций (2.3.3).

Базисные функции треугольных элементов 9–12 однозначно определяются заданием множеств L и V . Это утверждение, а также конформность доказаны в [59].

Перечисленные конформные элементы плиты удовлетворяют условиям теоремы 1, причем

- для элемента 12 $\tau=1$;
- для элементов 8 и 11 $\tau=2$;
- для элемента 10 $\tau=3$;
- для элемента 9 $\tau=4$.

Приведем также два конформных элемента, представляющих только теоретический интерес, поскольку их базисные функции ни в явном виде, ни алгоритмически не получены:

13) Равновесный треугольник:

14) Равновесный четырехугольник:

$$L = \{u(a_i), u_{,j}(a_i)\},$$

$$V = \{p, \Delta^2 p = 0, p \in P_3(\Gamma_i), \partial_{v,j} p \in P_1(\Gamma_j)\};$$

Здесь $\Delta^2 p = \frac{\partial^4 p}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 p}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 p}{\partial x_2^4}$ - бигармонический оператор.

Поскольку $P_2 \subset V$, то элементы 13, 14 удовлетворяют условиям Теоремы 1 при $\tau=1$. Эти

элементы будут применяться при исследовании неконформных элементов. Их базисные функции обозначим λ_k .

Для приведенных ниже неконформных элементов тонкой плиты базисные функции обозначим μ_k ,

$$L = \{u(a_i), u_{,j}(a_i)\},$$

15) Пряугольник Адзини-Клафа-Мелоша [59]:

$$V = P_3 + \{x_1^3 x_2, x_1 x_2^3\};$$

16) Неконформный треугольник [18]:

$$V = \{p \in P_4, p \in P_3(\Gamma_j), \int_{\Omega} \partial_{,j,k}(\mu_k - \lambda_k) d\Omega = 0\};$$

17) Произвольный четырехугольник [33]:

$$V = \{p \in P_3(\Omega_j), p \in C^1(\Omega), \int_{\Omega} \partial_{,j,k}(\mu_k - \lambda_k) d\Omega = 0\};$$

Базисные функции элементов 15,16,17 однозначно определяются описанием множеств L и V [59].

Элементы 15 – 17 удовлетворяют условиям теоремы 3, причем:

- для элемента 15 $\tau_1=2, \tau_2=1$;
- для элементов 16 и 17 $\tau_1=\tau_2=1$.

Представленный набор конечных элементов позволяет решать широкий класс линейных статических задач.

Построенные элементы используются и при решении нелинейных и динамических задач.

Приведем предлагаемые в ряде работ конечные элементы изгибаемой плиты, которые не рекомендуются к применению, т.к. не удовлетворяют условиям сходимости МКЭ.

18) Конформный прямоугольник:

$$L = \{u(a_i), u_{,1}(a_i), u_{,2}(a_i)\}, V = Q_3;$$

Базисные функции не удовлетворяют одному из равенств полноты (2.2.10) при $|j|=2$, а именно, при $j=(1,1)$, т.е. в правой части (2.2.10) – $x_1 x_2$.

19) Треугольник Зенкевича [59]:

$$L = \{u(a_i), u_{,1}(a_i), u_{,2}(a_i)\}, V = P_3 \text{ при дополнительном условии:}$$

$$p \in V, \text{ если } 6 p(a) - \sum_{i=1}^3 [2 p(a_i) + (Dp(a_i), a_i - a)] = 0,$$

где $Dp(a_i)$ – вектор с компонентами $p_{,1}(a_i), p_{,2}(a_i)$, который скалярно умножается на вектор $a_i - a$. Элемент не конформен, базисные функции однозначно определяются множествами L и V , он удовлетворяет условиям полноты при $\tau=1$ и удовлетворяет условиям теоремы 3 о сходимости неконформных элементов в том и только в том случае, когда все линии сетки параллельны трем фиксированным прямым [80].

Нелинейные статические задачи

Приведены общие теоремы существования и единственности решения нелинейных стационарных задач, представлены наиболее известные и применяемые приближенные методы их решения. Общая теория применена затем к конкретным классам нелинейных задач: геометрическая нелинейность, нелинейная упругость, задачи с односторонними ограничениями. Рассмотрены также связанные с геометрически нелинейными задачами расчеты устойчивости.

Приближенные методы решения нелинейных статических задач

Решение нелинейной статической задачи удовлетворяет, как и в линейном случае, принципу возможных перемещений (1.1.10)

$$a(u, v) + l(v) = 0, \quad (3.1.1)$$

однако функционал $a(u, v)$ не является линейным по первому аргументу.

Нелинейность может возникнуть по следующим причинам:

Нелинейной является зависимость между деформациями и напряжениями – физическая нелинейность.

Нелинейной является зависимость между перемещениями и деформациями – геометрическая нелинейность.

Множество возможных перемещений V не является линейным – конструктивная нелинейность – задачи с односторонними ограничениями, с трением и т.д.

Возможны, естественно, комбинации этих вариантов.

Будем предполагать, что $a(0, v) = 0$.

Норма $\|u\|_v = \|u\|$ – это энергетическая норма соответствующей линейной задачи. Нелинейный функционал $a(u, v)$ предполагается непрерывным по u , т.е. для всех $u_1, u_2 \in V$ справедливо неравенство

$$|a(u_1, v) - a(u_2, v)| \leq k \|u_1 - u_2\| \|v\|. \quad (3.1.2)$$

Существование и единственность решения

В линейном случае существование единственного решения обеспечивается условиями (1.1.6) и (1.1.9).

Условиями существования и единственности решения нелинейной задачи (3.3.1) являются, как установлено в [7, 54], неравенства (1.1.9), (3.1.2) и условие строгой монотонности

$$a(u_2, u_2 - u_1) - a(u_1, u_2 - u_1) \geq k \|u_2 - u_1\|^2, \quad (3.1.3)$$

которое должно быть выполнено для всех $u_1, u_2 \in V$.

Для существования (не единственного) решения достаточно выполнения (3.1.2), (1.1.9) и условия коэрцитивности

$$\lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{a(u, u)}{\|u\|} = \infty. \quad (3.1.4)$$

Отметим, что условие коэрцитивности следует из (3.1.3) при $u_2=u$, $u_1=0$.

Неравенство (3.1.3) – обобщение понятия монотонно возрастающей функции, условию коэрцитивности в одномерном случае соответствует:

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} f(u) = \pm\infty.$$

Обозначим $a'(u, w, v)$ производную функционала $a(u, v)$ по u :

$$a'(u, w, v) = \frac{d}{dt} [a(u + tw, v)]_{t=0}, \quad (3.1.5)$$

Функционал $a'(u, w, v)$ линеен по второму и третьему аргументам.

Условие строгой монотонности (3.1.3) выполнено, если для всех $u, v \in V$ справедливо неравенство

$$a'(u, w, v) \geq K \|v\|^2. \quad (3.1.6)$$

Уравнение принципа возможных перемещений (3.1.1) является условием минимума потенциальной энергии нелинейной задачи. Поэтому функционал $a(u, v)$ – это производная некоторого функционала, тогда $a'(u, w, v)$ будет его второй производной, следовательно [8]

$$a'(u, w, v) = a'(u, v, w). \quad (3.1.7)$$

Отметим, что уравнение

$$a'(0, u, v) + l(v) = 0 \quad (3.1.8)$$

является принципом возможных перемещений линейной задачи, соответствующей (3.1.1), и будем обозначать

$$a_0(u, v) = a'(0, u, v). \quad (3.1.9)$$

Уравнения метода конечных элементов для нелинейной задачи строятся так же, как для линейной, т.е. перемещение ищем в виде (2.1.4) из уравнений (2.1.5). Для сходимости МКЭ при выполнении условия коэрцитивности (3.1.2) (или (3.1.6)) достаточно тех же условий на базисные функции, что и для линейной задачи [23], [59].

Приближенные методы решения нелинейных уравнений

Для всех изложенных здесь методов в качестве начального приближения принимаем $u_0=0$.

Метод Ньютона:

$$a'(u_m, u_{m+1} - u_m, v) + l(v) + a(u_m, v) = 0. \quad (3.1.10)$$

Модифицированный метод Ньютона:

$$a'(u_0, u_{m+1} - u_m, v) + I(v) + a(u_m, v) = 0. \quad (3.1.11)$$

Метод секущих:

Применяется, если существует представление $a(u, v) = a_1(u, u, v)$, где функционал $a_1(u, w, v)$ линеен по w и v . Тогда

$$a_1(u_m, u_{m+1}, v) + I(v) = 0. \quad (3.1.12)$$

В изложенных выше методах количество шагов (предел изменения m) заранее не известно. Вычисления продолжаются, пока величина $\|u_{m+1} - u_m\|$ не станет достаточно малой.

Шаговые методы.

Пусть $0 \leq \theta \leq 1$ и $u(\theta)$ - решение уравнения вида (3.1.1):

$$a(u(\theta), v) + \theta I(v) = 0. \quad (3.1.13)$$

Отметим, что $u(0) = 0$, $u(1)$ - решение (3.1.1). Продифференцировав (3.1.13) по θ , получим дифференциальное уравнение

$$a'(u(\theta), \frac{du}{d\theta}, v) + I(v) = 0 \quad (3.1.14)$$

с начальным условием $u(0) = 0$.

Пусть $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_M = 1$, $u_m = u(\theta_m)$. Воспользовавшись приближенным равенством

$$\frac{du}{d\theta} \approx \frac{u_{m+1} - u_m}{\theta_{m+1} - \theta_m},$$

запишем

Простой шаговый метод:

$$a'(u_m, u_{m+1} - u_m, v) + (\theta_{m+1} - \theta_m) I(v) = 0. \quad (3.1.15)$$

Схема (3.1.15) – это метод Эйлера решения дифференциального уравнения (3.1.14).

Заменив в (3.1.15) $\theta_m I(v)$ на $a(u_m, v)$ получим

Шаговый метод с учетом невязок:

$$a'(u_m, u_{m+1} - u_m, v) + \theta_{m+1} l(v) - a(u_m, v) = 0. \quad (3.1.16)$$

Шаговые методы могут применяться и в сочетании с методами Ньютона: на каждом или только на последнем шаге производятся уточнения по (модифицированному) методу Ньютона (3.1.10) или (3.1.11).

Отметим, что все промежуточные результаты шаговых методов u_m можно рассматривать как приближенные решения уравнения (3.1.13) при $\theta = \theta_m$, т.е. шаговые методы позволяют моделировать рост нагрузки.

Оценки погрешности приближенных методов

Здесь будут исследованы модифицированный метод Ньютона и простой шаговый метод при выполнении условий существования и единственности решения уравнения (3.1.1). Сходимость остальных перечисленных выше (и многих других) методов исследована в [13, 32, 34, 40, 51].

Простой шаговый метод.

Предположим, что производная $a'(u, v, w)$ функционала $a(u, v)$ удовлетворяет условию непрерывности

$$|a'(u_1, v, w) - a'(u_2, v, w)| \leq K \|u_1 - u_2\| \|v\| \|w\| \quad (3.2.1)$$

Обозначим

$$e(u_1, u_2, v) = a(u_1, v) - a(u_2, v) - a'(u_2, u_1 - u_2, v). \quad (3.2.2)$$

Из (3.2.1) следует неравенство

$$e(u_1, u_2, v) \leq K \|u_1 - u_2\|^2 \|v\|. \quad (3.2.1)$$

Пусть v_m - решения уравнений вида (3.1.13)

$$\begin{aligned} a(v_m, v) + \theta_m I(v) &= 0, \\ \theta &= \max_m \{\theta_{m+1} - \theta_m\}. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Из (3.2.4) получаем

$$a(v_{m+1}, v) - a(v_m, v) + (\theta_{m+1} - \theta_m) I(v) = 0, \quad (3.2.4)$$

Положив $v = v_{m+1} - v_m$ и применив (3.1.3) и (1.1.9), получим, что

$$\|v_{m+1} - v_m\| \leq K\theta. \quad (3.2.5)$$

Положив в уравнении простого шагового метода (3.1.15) $v = u_{m+1} - u_m$ и применив неравенство (3.1.5), получим

$$\|u_{m+1} - u_m\| \leq K\theta. \quad (3.2.6)$$

Обозначим $w_m = v_m - u_m$ - разность между точным и приближенным решениями.

Теорема 5. При выполнении условия (3.2.1) справедлива оценка погрешности метода (3.1.15)

$$\|w_M\| \leq K\theta. \quad (3.2.7)$$

Доказательство. Из уравнений (3.2.4) и (3.1.15) получаем равенство

$$\begin{aligned} a'(v_m, w_{m+1} - w_m, v) &= a'(u_m, u_{m+1} - u_m, v) - a'(v_m, u_{m+1} - u_m, v) \\ &- e(v_{m+1}, v_m, v). \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Положив $v = w_{m+1} - w_m$, применив в левой части (3.1.6), а в правой – (3.2.1), (3.2.6) и (3.2.3) получим неравенство

$$\|w_{m+1} - w_m\| \leq K\theta(\theta + \|w_m\|). \quad (3.2.9)$$

Применив неравенство треугольника $\|w_{m+1}\| \leq \|w_m\| + \|w_{m+1} - w_m\|$, получим из (3.2.9)

$$\|w_{m+1} - w_m\| \leq \|w_m\| + K\theta(\theta + \|w_m\|). \quad (3.2.10)$$

Сложим установленные неравенства (3.2.10) по m , тогда

$$\|w_M\| \leq K\theta + K\theta \sum_{m=0}^{M-1} \|w_m\|. \quad (3.2.11)$$

Из дискретного варианта леммы Гронуолла и (3.2.11) следует (3.2.7).

Модифицированный метод Ньютона

Обозначим (с учетом (3.1.9))

$$d(u, v) = a_0(u, v) - a(u, v). \quad (3.2.12)$$

Тогда запишем уравнение (3.1.11) модифицированного метода Ньютона:

$$a_0(u_{m+1}, v) + l(v) - d(u_m, v) = 0, \quad (3.2.13)$$

а исходное уравнение (3.1.1):

$$a_0(u, v) + l(v) - d(u, v) = 0. \quad (3.2.14)$$

Будем предполагать, что для всех $u_1, u_2, v \in V$ справедливо неравенство

$$|d(u_1, v) - d(u_2, v)| \leq q \|u_1 - u_2\| \|v\|, \quad (3.2.15)$$

причем $0 < q < 1$.

Теорема 6. При выполнении условия (3.2.15) справедлива оценка погрешности модифицированного метода Ньютона

$$\|u - u_m\| \leq K q^m. \quad (3.2.16)$$

Доказательство. Из уравнений (3.2.13), (3.2.14) получаем

$$d_0(u - u_{m+1}, v) = d(u, v) - d(u_m, v). \quad (3.2.17)$$

Положим $v = u - u_{m+1}$ и применим (3.2.15). Поскольку $a(u, u) = \|u\|^2$, то получим

$$\|u - u_{m+1}\| \leq q \|u - u_m\|. \quad (3.2.18)$$

Применяя (3.2.18) для $u - u_m, u - u_{m-1}$, получим (3.2.16), причем $K = \|u\|$.

Геометрически нелинейные задачи

Используются нелинейные соотношения между деформациями e_{ij} и перемещениями u_i (зависимости Грина [5], [16], [47])

$$e_{i,j}(u) = \varepsilon_{i,j}(u) + D_{i,j}(u), \quad (3.3.1)$$

где $\varepsilon_{i,j}(u)$ - деформации, определяемые линейными зависимостями Коши (1.1.1)

$$\varepsilon_{i,j}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2,$$

нелинейные составляющие $D_{i,j}(u)$ имеют вид

$$D_{i,j}(u) = u_{k,i}u_{k,j}/2. \quad (3.3.2)$$

Связь между деформациями $e_{i,j}(u)$ и напряжениями $\sigma_{i,j}(u)$ предполагается линейной и имеет вид (1.1.3) (закон Гука).

Нелинейную задачу вида (3.1.1) получим из условия минимума функционала полной энергии (1.1.11)

$$\pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{i,j}(u) e_{i,j}(u) d\Omega + l(u). \quad (3.3.3)$$

Вычислим производные входящих в (3.3.3) величин. Имеем

$$e'_{i,j}(u, v) = \varepsilon_{i,j}(v) + D'_{i,j}(u, v), \quad (3.3.4)$$

$$D'_{i,j}(u, v) = (u_{k,i}v_{k,j} + u_{k,j}v_{k,i})/2, \quad (3.3.5)$$

Формулы для $\sigma'_{i,j}(u, v)$ получаем заменой в (1.1.3) $\varepsilon_{i,j}$ на $e'_{i,j}(u, v)$. Из них следует равенство

$$\sigma'_{i,j}(u, v) e_{i,j}(u) = \sigma_{i,j}(u) e'_{i,j}(u, v). \quad (3.3.6)$$

Вычислив и приравняв нулю производную полной энергии $\pi(u)$, получим уравнения вида (3.1.1)

$$a(u, v) + l(v) = 0.$$

где согласно (3.3.4) - (3.3.6)

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma_{i,j}(u) e'_{i,j}(u, v) d\Omega. \quad (3.3.7)$$

Для производной $a'(u, v, w)$ получим

$$a'(u, v, w) = a_D(u, v, w) + a_N(u, v, w), \quad (3.3.8)$$

где

$$a_D(u, v, w) = \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{i,j}(u, v) \dot{e}_{i,j}(u, w) d\lambda,$$

$$a_N(u, v, w) = \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{i,j}(u) D_{i,j}^*(v, w) d\lambda,$$

$$D^*(v, w) = \frac{1}{2} (v_{k,i} w_{k,j} + v_{k,j} w_{k,i}), \quad (3.3.9)$$

Неравенства непрерывности (3.1.2) и (3.2.1) для геометрически нелинейных задач выполнены в предположении достаточной гладкости решения u .

Неравенство коэрцитивности (3.1.4) доказано в [59].

Поскольку

$$a_D(u, v, v) \geq 0,$$

для выполнения условия строгой монотонности (3.1.3) или (3.1.6) достаточно положительной определенности матрицы напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$, т.е. положительности главных напряжений.

Из (3.3.2), (3.3.4), (3.3.5) и (3.3.8) следует, что

$$\dot{D}_{i,j}^*(0, v) = 0, \quad \dot{e}_{i,j}(0, v) = \varepsilon_{i,j}(v),$$

$$D_{i,j}(0) = 0, \quad e_{i,j}(0) = 0, \quad \sigma_{i,j}(0) = 0, \quad \sigma_{i,j}(0, v) = \sigma_{i,j}(v).$$

Тогда из (3.1.9) получаем

$$a_0(v, w) = a^*(0, v, w) = a_D(0, v, w).$$

Условие сходимости модифицированного метода Ньютона (3.2.15) при достаточно больших напряжениях не выполнено, поэтому для решения геометрически нелинейных задач при условии монотонности применяется простой шаговый метод (3.1.15):

$$a_D(u_m, u_{m+1} - u_m, v) + a_N(u_m, u_{m+1} - u_m, v) + l(v) = 0. \quad (3.3.10)$$

Методы решения геометрически нелинейных задач при отсутствии монотонности («хлопок» и подобные задачи) авторам не известны.

При учете температурных воздействий при вычислении $\dot{\sigma}_{ij}$ в a_N по формулам (1.1.3) от деформаций e_{ij} отнимаются температурные, в выражение для $l(v)$ добавляются слагаемые вида (1.1.4)

$$-\frac{E}{2\mu} cT \int_{\Omega} \dot{e}_{i,j}(u_m, v) d\Omega \quad (3.3.11)$$

Перейдем теперь от трехмерной геометрически нелинейной задачи к практически более важным двумерным и одномерным.

Геометрически нелинейный стержень

Используются формулы для перемещений вида (1.2.4)

$$U_1(x) = u_1 - x_2 u_{2,1} - x_3 u_{3,1} + \alpha_{1,1} \psi_1,$$

$$\begin{aligned} U_2(x) &= u_2 - (x_3 - x_{3,0})\alpha_1, \\ U_3(x) &= u_3 + (x_2 - x_{2,0})\alpha_2. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Для деформаций e_{II} полагаем:

$$e_{11} = u_{1,1} - x_2 u_{2,11} - x_3 u_{3,11} + (u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2)/2, \quad (3.3.13)$$

остальные деформации вычисляются, как в линейном случае.

Тогда для a_D и a_N получаем

$$a_D(u, v, w) = \int_0^L [EF(v_{1,1} + u_{2,1}v_{2,1} + u_{3,1}v_{3,1})(w_{1,1} + u_{2,1}w_{2,1} + u_{3,1}w_{3,1}) +$$

$$+ GJ_1\beta_{1,1}\gamma_{1,1} + EJ_3v_{2,11}w_{2,11} + EJ_2v_{3,11}w_{3,11}]dx_1,$$

$$a_N(u, v, w) = \int_0^L N_1(u)(v_{2,1}w_{2,1} + v_{3,1}w_{3,1})dx_1, \quad (3.3.15)$$

$$N_1(u) = \int_{\Omega_0} Ee_{11}d\Omega_0 = EF(u_{11} + (u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2)/2).$$

Нить

Перемещения постоянны по сечению,

$$e_{1,1}(u) = \sqrt{(1 + u_{1,1})^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2} - 1, \quad (3.3.16)$$

стальные деформации равны нулю.

Обозначим $g(u) = 1 + e_{11}(u)$,

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) = (1 + u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}).$$

Дифференцируя (3.3.16), получим

$$\begin{aligned} e'_{1,1}(u, v) &= g'(u, v) = \frac{(\tau, v)}{g(u)}, \\ e''_{i,j}(u, v, w) &= \frac{1}{g(u)} [(v, w) - e'_{11}(u, v)e'_{11}(u, w)]. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 a_D(u, v, w) &= \int_0^L EF \dot{e}_{11}(u, v) \dot{e}_{11}(u, w) dx_1, \\
 a_N(u, v, w) &= \int_0^L EF e_{11}(u) e''_{11}(u, v, w) dx_1.
 \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Вектор $\tau_l = \tau/g(u)$ - это единичный вектор касательной к деформированной линии нити, $e'_{11}(u, v)$ - проекция вектора v на τ_l , вектор $v - (\tau_l, v) \tau_l$ ортогонален τ_l .

Поэтому при построении матриц жесткости, соответствующих a_D и a_N можно пользоваться представлением в системе координат «нового положения»

$$\begin{aligned}
 a_D(u, v, w) &= \int_0^L EF v_{1,1} w_{1,1} dx_1, \\
 a_N(u, v, w) &= \int_0^L N_1 (v_{2,1} w_{2,1} + v_{3,1} w_{3,1}) dx_1,
 \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

а затем применить матрицу косинусов, соответствующую переходу от недеформированного положения к деформированному.

Стержень – сильный изгиб [39]

Используются зависимости для перемещений (3.3.12), формулы для деформаций (3.3.1), (3.3.2), закон Гука и формулы (1.2.13) для сил N_i и моментов M_i .

Дифференцируя формулы для перемещений стержня (3.3.12) и подставляя в (3.3.2), получим

$$D_{1,1}(u) = \left[(u_{2,1} - (x_3 - x_{3,0})\alpha_{1,1})^2 + (u_{3,1} + (x_2 - x_{2,0})\alpha_{1,1})^2 \right] / 2,$$

$$D_{1,2}(u) = D_{2,1}(u) = -u_{2,1}(u_{1,1} - x_2 u_{2,11} - x_3 u_{3,11}) / 2,$$

$$D_{1,3}(u) = D_{3,1}(u) = -u_{3,1}(u_{1,1} - x_2 u_{2,11} - x_3 u_{3,11}) / 2,$$

где $x_{2,0}$, $x_{3,0}$ - координаты центра кручения.

Интегрируя по сечению в соответствии с формулами (1.2.13) для сил и моментов в системе координат «нового положения» получаем, что

$$a_D(u, v, w) = a_0(v, w),$$

$$\begin{aligned} a_N(u, v, w) = & \int_0^L [N_1(v_{2,1}w_{2,1} + v_{3,1}w_{3,1} + r\beta_{1,1}\gamma_{1,1}) + N_2(v_{1,1}w_{2,1} + v_{2,1}w_{1,1}) + \\ & + N_3(v_{1,1}w_{3,1} + v_{3,1}w_{1,1}) + (M_2\beta_1)_{,1}w_{2,1} + (M_2\gamma_1)_{,1}v_{2,1} + (M_3\beta_1)_{,1} + \\ & + (M_3\gamma_1)_{,1}v_{3,1} + \frac{1}{2}M_1(v_{2,11}w_{3,1} + v_{3,1}w_{2,11} - v_{3,11}w_{2,1} - v_{2,11}w_{3,1})] dx_1, \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

где β_1, γ_1 - возможные повороты вокруг оси стержня, $r = (J_2 + J_3)/F + x_{2,0}^2 + x_{3,0}^2$.

При учете температурных воздействий для геометрически нелинейных стержней применяются представление (1.2.20) и формула (1.2.21) для «нового положения».

В зависимости (3.3.12) можно добавить слагаемые $-(x_2 - x_{2,0})\alpha_1^2/2$ и $-(x_3 - x_{3,0})\alpha_1^2/2$ для u_2 и u_3 соответственно, что дает более точное описание поворота вокруг оси x_1 . Тогда в $a_N(u, w, v)$ добавится слагаемое

$$- \int_0^L \int_{\Omega} [(x_2 - x_{2,0})f_2 + (x_3 - x_{3,0})f_3] dx_2 dx_3 \beta_1 \gamma_1 dx_1. \quad (3.3.21)$$

Жесткие вставки в геометрически нелинейных задачах порождают функционал

$$a_N(u, v, w) = N_1(\beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3) + N_2(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) + N_3(\beta_1\gamma_3 + \beta_3\gamma_1),$$

где β_i, γ_j - повороты.

Этот функционал получаем из (3.3.20) при $M_1=0, w_1=v_1=0, N_2=\text{const}, N_3=\text{const}$ из известных соотношений $v_{3,1}=-\beta_2, v_{2,1}=\beta_3, M_{3,1}=-N_2, M_{2,1}=N_3$.

Геометрически нелинейная оболочка – уравнения Кармана [78]

Здесь индексы i, j принимают значения 1, 2. Используется представление перемещений вида (1.3.1)

$$u_i(x) = u_i - x_3 u_{3,i},$$

$$u_3(x) = u_3.$$

Деформации имеют вид [60]

$$e_{i,j}(u) = x_3 u_{3,ij},$$

где

$$e_{i,j}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{3,i}u_{3,j})/2. \quad (3.3.22)$$

Сравнивая с (3.3.1), (3.3.2), получаем

$$D_{i,j}(u) = (u_{3,i}u_{3,j})/2, \quad (3.3.23)$$

поэтому

$$\begin{aligned} D'_{i,j}(u, v) &= (u_{3,i}v_{3,j} + u_{3,j}v_{3,i})/2, \\ D''_{i,j}(v, w) &= (v_{3,i}w_{3,j} + v_{3,j}w_{3,i})/2, \\ e'_{i,j}(u, v) &= (v_{i,j} + v_{j,i})/2 + D'_{i,j}(u, v), \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

Для напряжений применяется закон Гука (1.3.3)

$$\sigma_{i,j} = G \left[e_{i,j} + \frac{\mu}{1-\mu} (e_{1,1} + e_{2,2}) \delta_{i,j} \right].$$

Тогда

$$\begin{aligned} N_{i,j}(u) &= G \delta \left[e_{i,j}(u) + \frac{\mu}{1-\mu} (e_{1,1}(u) + e_{2,2}(u)) \delta_{i,j} \right], \\ N'_{i,j}(u) &= G \delta \left[e'_{i,j}(u, v) + \frac{\mu}{1-\mu} (e'_{1,1}(u, v) + e'_{2,2}(u, v)) \delta_{i,j} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Величины $N_{i,3}$, $M_{i,j}$ вычисляются по (1.3.6), как в линейном случае.

Подставляя (3.3.22)–(3.3.25) в (3.3.9), получим

$$a_D(u, v, w) = \int_{\Omega} [N'_{i,j}(u, v) e''_{i,j}(u, w) + M_{i,j}(v) w_{3,i}] d\Omega, \quad (3.3.26)$$

$$a_N(u, v, w) = \int_{\Omega} [N_{i,j}(u) (v_{3,i} w_{3,j} + v_{3,j} w_{3,i})/2] d\Omega. \quad (3.3.27)$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} [N_{i,j}(u) e'_{i,j}(u, v) + M_{i,j}(u) v_{3,i}] d\Omega, \quad (3.3.28)$$

При учете температурных воздействий для геометрически нелинейных оболочек применяются представление (1.3.23) и формула (1.3.24) для нового положения.

Функционал $I(v)$ строится, как для линейной задачи. Если нагрузки заданы не в глобальной системе координат, а в местной (такой является, в частности, и температурное воздействие), то функционал преобразовывается с учетом «нового положения».

Мембрана

Перемещения предполагаются постоянными по толщине. Деформации и их производные $e'_{ij}(u, v)$, $e''_{ij}(u, v, w)$, $i, j = 1, 2$ вычисляем, как для нити, по формулам, аналогичным (3.3.16), (3.3.17).

В системе координат «нового положения» $a_D(u, v, w)$ является функционалом $a(u, v)$ для плоского напряженного состояния, $a_N(u, v, w)$ – вычисляется по (3.3.27).

Оболочка – сильный изгиб

Основные зависимости получены аналогично сильному изгибу стержня.

Дифференцируя формулы для перемещений оболочки (1.3.1), подставляя в (3.3.1) и интегрируя по толщине, получим в системе координат «нового положения»

$$\begin{aligned} a_D(u, v, w) &= a_0(v, w), \\ a_N(u, v, w) &= \int_{\Omega} [N_{i,j}(u) v_{k,j} w_{k,j} + M_{i,j}(u) (v_{3,j} w_{1,j} + v_{1,j} w_{3,j}) + \\ &+ N_{3,i}(u) (v_{1,i} w_{3,i} + v_{3,i} w_{1,i})] d\Omega, \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Задачи устойчивости

Задача проверки устойчивости связана с геометрически нелинейными задачами и формулируется [2] следующим образом:

решение u нелинейной задачи (3.1.1) является устойчивым, если для него при всех $v \in V$ справедливо неравенство (3.1.6)

$$a'(u, v, v) \geq K \|v\|^2, \quad \text{где } K > 0 \text{ не зависит от } v,$$

и является неустойчивым, если (3.1.6) не выполнено при некотором v .

При решении нелинейной задачи шаговым методом условие (3.1.6) проверяется в ходе решения линейной задачи (3.1.15) для полученного на предыдущем шаге решения u_m .

Таким образом, шаговый метод решения геометрически нелинейной задачи одновременно является и методом проверки устойчивости при заданной нагрузке – устойчивости деформированной схемы.

Другой метод проверки называют устойчивостью недеформированной схемы.

Выполняется линейный расчет, по перемещению u определяются усилия и составляется функционал $a_N(v, w) = a_N(u, v, w)$ вида (3.3.15), или (3.3.20) для стержней, (3.3.27) или (3.3.29) для оболочек.

Предполагается, что усилия изменяются пропорционально некоторому параметру λ и рассматривается задача определения таких λ , при которых задача

$$a_0(v, w) + \lambda a_N(v, w) = 0 \tag{3.4.1}$$

имеет ненулевое решение v при всех $w \in V$.

Как установлено в [32], существует счетная последовательность чисел λ_s и соответствующих им решений v_s – форм потери устойчивости.

Наименьшее из положительных λ_s называют коэффициентом запаса устойчивости или критическим значением.

Обозначим $\lambda_{s,h}$, $v_{s,h}$ решения задачи (3.4.1), полученные МКЭ. Справедлива

Теорема 7. При выполнении условий сходимости МКЭ (раздел 2.1) имеют место оценки погрешности

$$|\lambda_s - \lambda_{s,h}| \leq k h^{\tau_0},$$

$$\|v_s - v_{s,h}\| \leq k h^{\tau_0}, \tag{3.4.2}$$

τ_0 определено в теореме 2.

Доказательство в конформном случае основано на следующем из теоремы Рэлея неравенстве $\lambda_s \leq \lambda_{s,h}$, приведено, например, в [42]. В неконформном случае доказательство приведено в [20]. Приближенное вычисление функционалов a_0 , a_N исследовано в [58].

Применение МКЭ сводит задачу (3.4.1) к алгебраической задаче на собственные значения, алгоритмы решения которой (QR – метод, итерации подпространств, метод Ланцоша и т.д.) приведены, например, в [53].

Нелинейная упругость

Связь между деформациями $\varepsilon_{ij}(u)$ и перемещениями предполагается линейной (зависимости Коши (1.1.1)).

Обозначим

$$\varepsilon_0(u) = \varepsilon_{ii}(u);$$

$$s_{i,j}(u) = \varepsilon_{i,j}(u) - \delta_{ij} \varepsilon_0(u)/3 \quad - \text{девиатор деформаций};$$

$$s(u) = \sqrt{s_{ij}(u)s_{ij}(u)/2} \quad - \text{интенсивность деформаций};$$

$$L_0 = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \quad (3.5.1)$$

Пусть $g(s)$ - непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$g(0) = 0,$$

$$(g(s_1) - g(s_2))(s_1 - s_2) \leq K|s_1 - s_2|^2, \quad K > 0, \quad (3.5.2)$$

$$g(s_1) - g(s_2) \leq E|s_1 - s_2|. \quad (3.5.3)$$

Условие (3.5.2) – условие монотонного возрастания $g(s)$, условие (3.5.3) означает, что $g(s)$ растет не быстрее, чем $E \cdot s$.

Связь между напряжениями и деформациями имеет вид [1], [48]

$$\sigma_{i,j}(u) = \frac{g(s)}{s} s_{i,j}(u) + L_0 \varepsilon_0(u). \quad (3.5.4)$$

Функционал $a(u, v)$ имеет вид

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma_{i,j}(u) \varepsilon_{i,j}(v) d\Omega, \quad (3.5.5)$$

работа внешних сил $l(v)$ определяется, как и в линейном случае.

Решение u задачи нелинейной упругости удовлетворяют уравнению (3.1.1).

При выполнении (3.5.2) функционал $a(u, v)$ удовлетворяет условию строгой монотонности (3.1.3) (доказательство приведено в [8, 54]), поэтому задача нелинейной упругости имеет единственное решение.

$$g'(s) = \frac{dg}{ds},$$

Обозначим

$$\sigma_{i,j}'(u, v) = g'(s) s_{i,j}(v) + L_0 \varepsilon_0(v). \quad (3.5.6)$$

Тогда

$$a'(u, v, w) = \int_{\Omega} \left[\sigma_{i,j}'(u, v) s_{i,j}(w) + L_0 \varepsilon_0(v) \varepsilon_0(w) \right] d\Omega. \quad (3.5.7)$$

Если функция $g'(s)$ удовлетворяет условию

$$g'(s_1) - g'(s_2) \leq k |s_1 - s_2|, \quad (3.5.8)$$

то, как следует из (3.5.6), (3.5.7), выполнено условие (3.2.1) сходимости простого шагового метода.

Если же функция $g(s)$ кусочно-линейна (например, диаграмма Прандтля), неравенство (3.5.7), а, следовательно, и (3.2.1) не имеют места. В этом случае простой шаговый метод может дать неверный результат.

Однако из (3.5.3) и (3.2.12), (1.1.3) следует неравенство (3.2.15), обеспечивающее сходимость модифицированного метода Ньютона, который и следует применять в случае не дифференцируемой функции $g(s)$.

Приведенные выше трехмерные соотношения сохраняются для плоской задачи, если положить в (3.5.1) $\varepsilon_0 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$ и $L_0 = \frac{E}{2(1-\mu)}$ для плоского напряженного состояния.

Для стержней зависимость (3.5.4) приобретает вид

$$\sigma_{1,1}(u) = g(\varepsilon_{1,1}), \quad (3.5.9)$$

$$\partial_e \varepsilon_{1,1}(u) = u_{1,1} - x_2 u_{2,11} - x_3 u_{3,11} = s. \quad (3.5.10)$$

Обозначим аналогично (1.2.13),

$$\begin{aligned} N_1(u) &= \int_{\Omega_0} \sigma_{1,1}(u) d x_2 d x_3, \\ M_2(u) &= \int_{\Omega_0} x_3 \sigma_{1,1}(u) d x_2 d x_3, \\ M_3(u) &= - \int_{\Omega_0} x_2 \sigma_{1,1}(u) d x_2 d x_3. \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Тогда из (3.5.5), (3.5.10) получим

$$a(u, v) = \int_0^L [N_1(u) v_{1,1} - M_2(u) v_{3,11} + M_3(u) v_{2,11}] dx_1. \quad (3.5.12)$$

Для вычисления $\alpha'(u, v, w)$ обозначим «интегральные жесткости»

$$\begin{aligned} EF(u) &= \int_{\Omega_0} g'(s) dx_2 dx_3, \quad EJ_2(u) = \int_{\Omega_0} x_3^2 g'(s) dx_2 dx_3, \\ ES_2(u) &= - \int_{\Omega_0} x_3 g'(s) dx_2 dx_3, \quad EJ_3(u) = \int_{\Omega_0} x_2^2 g'(s) dx_2 dx_3, \\ ES_3(u) &= - \int_{\Omega_0} x_2 g'(s) dx_2 dx_3, \quad EJ_{2,3}(u) = \int_{\Omega_0} x_2 x_3 g'(s) dx_2 dx_3, \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

Поскольку $\sigma'_{l,1}(u, v) = g'(\varepsilon_{l,1})(u)$, $(\varepsilon_{l,1})(v)$, из (3.5.7), (3.5.10) получим

$$\begin{aligned} a'(u, v, w) &= \int_0^L [EF(u) v_{1,1} w_{1,1} + ES_3(u)(v_{1,1} w_{2,11} + w_{1,1} v_{2,11}) + \\ &+ ES_2(u)(v_{1,1} w_{3,11} + w_{1,1} v_{3,11}) + EJ_2(u) v_{3,11} w_{3,11} + \\ &+ EJ_3(u) v_{2,11} w_{2,11} + EJ_{2,3}(u)(v_{2,11} w_{3,11} + w_{3,11} v_{2,11})] dx_1 \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

Формулы (3.5.11), (3.5.13) легко модифицируются для железобетонных сечений. В этом случае область Ω_0 представляется как объединение двух областей: Ω_1 – бетон и Ω_2 – арматура; задаются две зависимости: $g_1(\varepsilon_{l,1})$ для бетона и $g_2(\varepsilon_{l,1})$ для арматуры; интеграл по Ω_0 – сумма интегралов по Ω_1 и Ω_2 .

При учете температурных воздействий и применении шагового метода из (1.2.20), (3.5.10), (3.5.13) получаем аналогичные (1.2.21) слагаемые в $l(v)$:

$$\begin{aligned} -c \int_0^l [T_0(EFv_{1,1} + ES_3v_{2,11} + ES_2v_{3,11}) + T_2(ES_3v_{1,1} + EJ_3v_{2,11} + \\ + EJ_{2,3}v_{3,11}) + T_3(ES_2v_{1,1} + EJ_{2,3}v_{2,11} + EJ_2v_{3,11})] dx_1 \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

Для оболочек ($i, j=1, 2$) полагаем в (3.5.1)

$$\varepsilon_0(u) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{1,1}(u) + \varepsilon_{2,2}(u)), \quad E_0 = \frac{E}{1-\mu},$$

$$\varepsilon_{i,j}(u) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - x_3 u_{3,j} \quad (3.5.16)$$

и используем (3.5.4).

Обозначив

$$N_{i,j}(u) = \int_{\delta_0} \sigma_{i,j}(u) d x_3, \quad M_{i,j}(u) = \int_{\delta_0} -x_3 \sigma_{i,j}(u) d x_3, \quad (3.5.17)$$

получим из (3.5.5), (3.5.16)

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} N_{i,j}(u) (v_{i,j} + v_{j,i}) + M_{i,j}(u) v_{3,j} \right] d\Omega. \quad (3.5.18)$$

Обозначив «интегральные жесткости» оболочки

$$D_0 = \int_{\delta_0} g'(s) d x_3,$$

$$D_1 = - \int_{\delta_0} x_3 g'(s) d x_3,$$

$$D_2 = \int_{\delta_0} x_3^2 g'(s) d x_3,$$

получим из (3.5.7), (3.5.16) формулу для $\alpha(u, v, w)$, аналогичную (3.5.14).

Модификация (3.5.17), (3.5.19) для железобетона и учет температурных воздействий – аналогично стержню.

Возможен одновременный учет физической и геометрической нелинейностей. Тогда используются зависимости (3.5.1), (3.3.1), (3.3.7). При выполнении неравенства (3.3.13) применяется шаговый метод.

Функционал a_N определен в (3.3.9),

$$a_D(u, v, w) = \int_{\Omega} \sigma'_{i,j}(u, v) e_{i,j}(u, v) d\Omega.$$

Задача с односторонними ограничениями

Сформируем вначале общую вариационную задачу. Пусть $a_I(u, v)$, $I(v)$ - функционалы возможных работ линейной задачи, $a_0(u, v)$ и $d(u, v)$ - некоторые билинейный и нелинейный функционалы, удовлетворяющие условиям

$$a_0(u, u) \geq 0, \\ |d(u_1, v) - d(u_2, v)| \leq \sqrt{a_0(u_1 - u_2, u_1 - u_2)} \cdot a_0(v, v). \quad (3.6.1)$$

Обозначим $a(u, v) = a_I(u, v) + a_0(u, v)$ и рассмотрим задачу:

$$a(u, v) + d(u, v) + I(v) = 0. \quad (3.6.2)$$

Из (3.6.1) получаем, что для всех $u_1, u_2, v \in V$ справедливо при $0 < q < 1$ неравенство

$$|d(u_1, v) - d(u_2, v)| \leq q \|u_1 - u_2\| \cdot \|v\|. \quad (3.6.3)$$

Из теоремы о сжимающих отображениях [32] следует, что уравнение (3.6.2) имеет единственное решение, метод последовательных приближений

$$a(u_{m+1}, v) + d(u_m, v) + I(v) = 0, \quad u_0 = 0 \quad (3.6.4)$$

сходится и имеет место оценка погрешности

$$\|u - u_{m+1}\| \leq q^{m+1} \|u\|. \quad (3.6.5)$$

Рассмотрим применение этого метода к конкретным односторонним задачам.

Односторонние связи

Пусть Ω_0 - область, где заданы односторонние связи. Рассмотрим нелинейную зависимость между напряжением σ и деформацией ε

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon < 0, \\ 0, & \varepsilon \geq 0, \end{cases} \quad (3.6.6)$$

где E - жесткость односторонней связи (на сжатие).

Полагаем

$$a_0(u, v) = \int_{\Omega_0} E \varepsilon(u) \varepsilon(v) d\Omega_0,$$

$$d(u, v) = \int_{\Omega_0} [\sigma(\varepsilon(u)) - E \varepsilon(u)] \varepsilon(v) d\Omega_0. \quad (3.6.7)$$

Тогда задача с односторонними связями формулируется в виде (3.6.2), неравенство (3.6.1) и, следовательно, (3.6.3) выполнены, поэтому, задача имеет единственное решение, к которому сходится метод последовательных приближений (3.6.4) с оценкой погрешности (3.6.5).

Задачи с трением

Пусть Γ_0 - область возможного контакта с трением.

Обозначим через $\sigma_n, \sigma_\tau, \varepsilon_n, \varepsilon_\tau$ нормальные и касательные (к Γ_0) напряжения и деформации, $\psi > 0$ - коэффициент трения. Нелинейная зависимость между σ_n и ε_n имеет вид, аналогичный (3.6.6)

$$\sigma_n(\varepsilon_n) = \begin{cases} E_n \varepsilon_n, & \varepsilon_n \leq 0, \\ 0, & \varepsilon_n > 0. \end{cases} \quad (3.6.8)$$

Для касательных напряжений принимается статический закон трения Кулона [14]:

$$\sigma_\tau^0 = E_\tau \varepsilon_\tau, \\ \sigma_\tau(\varepsilon_\tau) = \begin{cases} E_\tau \varepsilon_\tau, & |\sigma_\tau^0| \leq -\psi \sigma_n, \\ \frac{\sigma_\tau^0}{|\sigma_\tau^0|} (-\psi \sigma_n), & |\sigma_\tau^0| > -\psi \sigma_n. \end{cases} \quad (3.6.9)$$

При $\varepsilon_n > 0$ - отсутствует контакт, при $|\sigma_\tau^0| > -\psi \sigma_n$ - проскальзывание.

Положим

$$a_0(u, v) = \int_{\Gamma_0} [E_n \varepsilon_n(u) \varepsilon_n(v) + E_\tau \varepsilon_\tau(u) \varepsilon_\tau(v)] d\Gamma_0,$$

$$d(u, v) = \int_{\Gamma_0} [(\sigma_n \varepsilon_n(u) - E_n \varepsilon_n(u)) \varepsilon_n(v) + (\sigma_\tau \varepsilon_\tau(u) - E_\tau \varepsilon_\tau(u)) \varepsilon_\tau(v)] d\Gamma_0 \quad (3.6.10)$$

Аналогичная постановка задачи предложена и исследована в [16].

Неравенства (3.6.1) и (3.6.3) выполнены, если задано напряжение σ_n . Следовательно, сформулированная в виде (3.6.2) задача с трением имеет единственное решение и справедлива оценка погрешности (3.6.5) для метода последовательных приближений.

Материалы с диаграммой Прандтля

Зависимость между напряжением σ и деформацией ε имеет вид [16]

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} R_s, & E\varepsilon > R_s \\ E\varepsilon, & R_c \leq E\varepsilon \leq R_s \\ R_c, & E\varepsilon < R_c \end{cases} \quad (3.6.11)$$

где $R_c < 0 < R_s$, R_c , R_s - пределы сжатия и растяжения. Возможен случай $R_c = -\infty$ или $R_s = \infty$. В случае $R_c = -\infty$ и $R_s = \infty$ получаем линейно упругий материал.

Функционалы $a_0(u, v)$ и $d(u, v)$ имеют вид (3.6.7).

Неравенство (3.6.1) выполнено. Следовательно, метод последовательных приближений (3.6.4) сходится к единственному решению уравнения (3.6.2) с оценкой погрешности (3.6.5).

Зависимости, аналогичные (3.6.11) могут быть построены также в двух- и трехмерном случаях для главных напряжений и деформаций.

Сыпучая среда (грунт)

Для сыпучей среды выполняются следующие требования:

- Главные напряжения $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ удовлетворяют неравенству $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 \leq R_s$ (3.6.12)

где $R_s \geq 0$ - предельное напряжение на растяжение.

- Выполнено условие прочности в виде

$$F(\sigma) \leq 0, \quad (3.6.13)$$

где $F(\sigma)$ - выпуклый функционал от $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Для условия прочности Кулона-Мора

$$F(\sigma) = \sigma_0 \sin \varphi + s_2 (3 \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) - 3c * \cos \varphi.$$

Для условия Друккера-Прагера

$$F(\sigma) = 2\sigma_0 \sin \varphi + s_2(3 - \sin \varphi) - 6c \cdot \cos \varphi.$$

Для условия Боткина

$$F(\sigma) = \sigma_0 \sin \varphi + s_2 - 2c \cdot \cos \varphi$$

Для двумерной задачи

$$F(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_2 + \sin \varphi (\sigma_1 + \sigma_2) - 2c \cdot \cos \varphi.$$

Здесь $c > 0$ - сцепление, φ - угол внутреннего трения, σ_0, s_2, ψ - инварианты тензора напряжений.

Отметим, что для всех условий прочности из (3.6.13) при $\sigma_i = R_i, i=1,2,3$, получаем

$$R, \operatorname{tg} \varphi \leq c. \quad (3.6.14)$$

Зависимость между перемещениями и деформациями линейна.

В пространстве главных напряжений обозначим через Σ выпуклое множество векторов $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, удовлетворяющих (3.6.12), (3.6.13). Положим σ_{ij}^0 - напряжения, вычисленные по формулам закона Гука (1.1.3) в трехмерном случае, из (1.3.21) - плоская деформация - в двумерном, $\sigma^0 = (\sigma_1^0, \sigma_2^0, \sigma_3^0)$ - вектор главных напряжений, вычисленных для σ_{ij}^0 .

Обозначим через $P\sigma^0 \in \Sigma$ точку множества Σ , такую, что для всех $\tau \in \Sigma$

$$|\sigma^0 - P\sigma^0| \leq |\sigma^0 - \tau|. \quad (3.6.15)$$

Существование и единственность $P\sigma^0$ следует из выпуклости Σ [16].

Тогда вектор $\sigma^d = \sigma^0 - P\sigma^0$ имеет длину, равную наименьшему расстоянию от σ^0 до множества Σ .

Очевидно, что при $\sigma^0 \in \Sigma$ получим $P\sigma^0 = \sigma^0$ и $\sigma^d = 0$. Если $\sigma^0 \notin \Sigma$, то $P\sigma^0$ принадлежит границе множества Σ , т.е. для $P\sigma^0$ хотя бы одно из неравенств (3.6.12), (3.6.13) превращается в равенство.

Обозначим через σ_{ij}^d напряжения, соответствующие вектору главных напряжений σ^d и положим

$$a_0(u, v) = \int_{\Omega} \sigma_{i,j}^0(u) \varepsilon_{i,j}(v) d\Omega,$$

$$d(u, v) = - \int_{\Omega} \sigma_{i,j}^d(u) \varepsilon_{i,j}(v) d\Omega. \quad (3.6.16)$$

Поскольку $0 \in \Sigma$, то $|\sigma^q| \leq |\sigma^0|$, откуда и из выпуклости Σ следует неравенство (3.6.1).

Следовательно, метод последовательных приближений (3.6.4) применим при расчете выпуклых сред и сходится к единственному решению уравнения (3.6.2) с оценкой (3.6.5).

Нестационарные задачи (динамика)

Здесь рассмотрены линейные динамические задачи, задачи вязко-упруго-пластичности, геометрически нелинейные динамические задачи и динамические односторонние задачи.

Нестационарные задачи характеризуются тем, что внешние силы, а, следовательно, и решение зависят от времени t , учитывается работа инерционных сил, а также сил трения (сопротивления).

Для линейных динамических задач рассматриваются переходные процессы (задачи с начальными условиями) и установившиеся колебания, для нелинейных – только задачи с начальными условиями.

Линейная динамическая задача

Возможная работа $b(u, v)$ инерционных сил имеет вид [16], [36]

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \rho u_i v_i d\Omega. \quad (4.1.1)$$

где $\rho = \rho(x) > \rho_0 > 0$ – плотность материала.

Возможная работа внешних и внутренних сил $l(t, v)$, $a(u, v)$ вычисляется так же, как в статическом случае.

Возможную работу сил трения обозначим $c(u, v)$.

Для стержней и оболочек будем предполагать, что плотность материала постоянна в сечении стержня или по толщине оболочки. Тогда из представления перемещений

$$\begin{aligned} U_1(x) &= u_1 - x_2 u_{2,1} - x_3 u_{3,1} + \alpha_{1,1} \psi_1, \\ U_2(x) &= u_2 - (x_3 - x_{3,0}) \alpha_1, \\ U_3(x) &= u_3 + (x_2 - x_{2,0}) \alpha_1 \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

получим для стержня:

$$b(u, v) = \int_0^L \rho [F(u_i, v_i) + J_2 u_{3,1} v_{3,1} + J_3 u_{2,1} v_{2,1} + J_1 \alpha_{1,1} \beta_{1,1}] dx_1 \quad (4.1.3)$$

Из представления перемещений ($i=1,2$)

$$\begin{aligned} U_i(x) &= u_i - x_3 u_{3,i}, \\ U_3(x) &= u_3 \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

получим для оболочки:

$$\int_{\Omega} \rho [\delta u_i v_i + \frac{\delta^3}{12} u_{3,i} v_{3,i} + \delta u_3 v_3] d\Omega. \quad (4.1.5)$$

Из (4.1.3), (4.1.5) следует, что справедливо неравенство:

$$|l(t, v)| \leq K \|v\|_{\rho}, \quad (4.1.6)$$

где $\|v\|_{\rho}^2 = b(v, v)$.

Возможная работа сил трения $c(u, v)$, обычно записывается в виде аналогичном (4.1.1) или (4.1.3), или (4.1.5), с заменой плотности ρ на коэффициент трения $\psi = \psi(x) > \psi_0$. Применяются и другие записи для $c(u, v)$. Далее будет предполагаться, что для всех $u, v \in V$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} c(u, u) &\geq 0, \\ c(u, v) &\leq K \|u\| \cdot \|v\|. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Обозначим

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Линейная динамическая задача формулируется следующим образом [16]:

найти $u = u(t) \in V$, удовлетворяющую при всех $v \in V$ равенству:

$$b(u'', v) + c(\dot{u}, v) + a(u, v) + l(t, v) = 0. \quad (4.1.8)$$

К уравнениям (4.1.8) добавляются:

начальные условия

$$u(0) = u^0, \quad \dot{u}(0) = u^1, \quad u^0, u^1 \in V, \quad (4.1.9)$$

или условия периодичности

$$u(0) = u(T), \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(T). \quad (4.1.10)$$

где T – период внешней нагрузки.

Будем обозначать $b(u) = b(u, u)$, $c(u) = c(u, u)$, $a(u) = a(u, u)$.

Положим в (4.1.8) $v = \dot{u}$ и воспользуемся очевидными равенствами

$$\begin{aligned} a(u, \dot{u}) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u), \\ b(u'', \dot{u}) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} b(u'). \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [b(u') + a(u)] + c(u) + l(t, u') = 0. \quad (4.1.12)$$

Равенство (4.1.12) называется уравнением энергетического баланса [38]. Величина $a(u)/2$ – это потенциальная энергия, $b(u')/2$ – кинетическая, их сумму называют полной энергией, $l(t, u')$ – это мощность внешних сил.

В случае периодических условий (4.1.10) проинтегрировав (4.1.12) от 0 до T , получим:

$$\int_0^T c(u) dt + \int_0^T l(t, u') dt = 0, \quad (4.1.13)$$

т.е. работа внешних сил за период полностью затрачивается на преодоление сопротивления.

При дополнительном условии

$$c(v) \geq kb(v). \quad (4.1.14)$$

из (4.1.13), (4.1.6) получаем существование и единственность решения задачи о периодических колебаниях (4.1.8), (4.1.10). Если (4.1.14) не выполнено, например $c(u, v) = 0$, решение может не существовать – резонанс.

В случае начальных условий (4.1.9) интегрирование (4.1.12) дает:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [b(u'(t)) + a(u(t))] - \frac{1}{2} [b(u'(0)) + a(u(0))] + \\ & + \int_0^t [c(u'(s)) + l(s, u'(s))] ds = 0. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Применив (4.1.7) для $c(u')$ и $l(s, u')$ получим неравенство

$$b(u'(t)) + a(u(t)) \leq k + k \int_0^t b(u'(s), u'(s)) ds. \quad (4.1.16)$$

Из леммы Гронуолла следует тогда

$$b(u') + a(u) \leq k, \quad (4.1.17)$$

откуда следует существование и единственность решения задачи с начальными условиями (4.1.8), (4.1.9) [16], [38].

Решение уравнения (4.1.8) методом конечных элементов ищем в виде

$$u_h(x, t) = d_k(t) \mu_k(x) \in V_\mu, \quad (4.1.18)$$

где $d_k(t)$ - функция от t (со значением в R^1), из системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$d_k''(t) b(\mu_k, \mu_j) + d_k'(t) c(\mu_k, \mu_j) + d_k(t) a(\mu_k, \mu_j) + l(t, \mu_j) = 0. \quad (4.1.19)$$

Начальные условия (4.1.9) преобразуются:

$$u_h(0) = P_\mu u^0, \quad u_h'(0) = P_\mu u^1, \quad \text{т.е.} \\ d_k(0) = L_k(u^0), \quad d_k'(0) = L_k(u^1). \quad (4.1.20)$$

В случае периодических условий (4.1.10) имеем

$$d_k(0) = d_k(T), \quad d_k'(0) = d_k'(T). \quad (4.1.21)$$

При выполнении условий сходимости МКЭ для статической задачи справедлива оценка погрешности [19], [42]

$$\|u - u_h\| + \|u - u_h\|_\rho \leq K h^{\tau_0}. \quad (4.1.22)$$

Для решения задачи (4.1.8) применяется метод Фурье разложения по формам собственных колебаний (собственным функциям). Пусть числа λ_k и функции $\varphi_k(x)$ - решения задачи на собственные значения

$$a(\varphi_k, v) = \lambda_k b(\varphi_k, v), \quad v \in V. \quad (4.1.23)$$

Из симметричности билинейных форм $a(u, v)$ и $b(u, v)$ следует, что

$$b(\varphi_k, \varphi_j) = \delta_{i,j}, \quad a(\varphi_k, \varphi_j) = \lambda_k \delta_{i,j}, \quad (4.1.24)$$

из их положительности – что $\lambda_k > 0$.

Если $c(u, v) \neq 0$, то предполагают, что

$$c(\varphi_k, \varphi_j) = \xi_k \omega_k \delta_{i,j}, \quad (4.1.25)$$

где $\omega_k^2 = \lambda_k$, $0 < \xi_k < 1$.

Решение ищем в виде суммы

$$u(t, x) = c_k(t) \varphi_k(x). \quad (4.1.26)$$

Подставим (4.1.26) в уравнение (4.1.8), положим $v=\varphi_i$ и воспользуемся (4.1.24), (4.1.25). Получим набор обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $c_k(t)$:

$$\ddot{c}_k + \xi_k \omega_k \dot{c}_k + \omega_k^2 c_k + I_k(t) = 0. \quad (4.1.27)$$

где $I_k(t) = I(t, \varphi_k)$.

Начальные условия (4.1.9) записываются в виде

$$c_k(0) = a(u^0, \mu_k), \quad \dot{c}_k(0) = b(u^1, \mu_k). \quad (4.1.28)$$

Условия периодичности сохраняются

$$c_k(0) = c_k(T), \quad \dot{c}_k(0) = \dot{c}_k(T). \quad (4.1.29)$$

Решения уравнений (4.1.27) при граничных условиях (4.1.28) или (4.1.29) в большинстве практически важных случаев (импульс, удар, сейсмическое воздействие, ветровое воздействие, периодическая нагрузка) могут быть получены в явном виде.

Точность метода Фурье зависит от количества удерживаемых в разложении (4.1.25) слагаемых.

Решение задачи (4.1.8) при условиях периодичности (4.1.10) и $I(t, v) = I_c(v) \cos \psi t + I_s(v) \sin \psi t$, $\psi T = 2\pi$ можно искать в виде $u(t) = u_c \cos \psi t + u_s \sin \psi t$ из системы не зависящих от t уравнений

$$-\psi^2 b(u_c, v) + a(u_c, v) + \psi c(u_c, v) + I_c(v) = 0,$$

$$-\psi^2 c(u_c, v) - \psi^2 b(u_s, v) + a(u_s, v) + I_s(v) = 0. \quad (4.1.30)$$

Для задачи (4.1.8) с начальными условиями применяется также метод конечных разностей.

Разностные схемы для линейной динамической задачи

Обозначим θ - шаг по времени и для $m=0, 1, \dots$ положим

$$t_m = m \theta, \quad u_m = u(t_m), \quad I_m(v) = I(t_m, v),$$

$$\alpha_m u = (u_{m+1} + u_{m-1})/2,$$

$$\beta_m u = (2\theta)^{-1} (u_{m+1} - u_{m-1}),$$

$$\gamma_m u = \theta^{-2} (u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}),$$

$$\delta_m u = \theta^{-1} (u_{m+1} - u_m). \quad (4.2.1)$$

Применяя формулы разложения в ряд Тейлора, получаем неравенства

$$|u(t_m) - \alpha_m u| \leq K \theta^2,$$

$$\begin{aligned} |u'(t_m) - \beta_m u| &\leq K \theta^2, \\ |u''(t_m) - \gamma_m u| &\leq K \theta^2, \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

а также

$$\begin{aligned} |u'(t_m) - \delta_m u| &\leq K \theta, \\ |u'(t_{m+1}) - \delta_m u| &\leq K \theta, \\ |u(t_{m+1}) - u_m| &\leq K \theta. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Константы в неравенствах (4.2.2), (4.2.3) зависят от высших производных по t функции $u(t)$.

При построении разностной схемы равенства (4.1.8) динамической задачи записываются в точках t_m , при этом

$$\begin{aligned} u''(t_m) &\quad \text{заменяются на } \gamma_m u, \\ u'(t_m) &\quad \text{- на } \beta_m u \text{ или на } \delta_m u, \\ u''(t_m) &\quad \text{- на } \alpha_m u \text{ или на } u_{m+1}, \text{ или на } u_m. \end{aligned}$$

Возможны также замены на линейные комбинации $\beta_m u$, $\delta_m u$ или u_{m+1} , u_m , u_{m-1} с суммой коэффициентов, равной единице.

Приведенные замены функции $u(t)$ и ее производных могут применяться в любой комбинации, что приводит к различным разностным уравнениям. Все они, в силу (4.2.2), (4.2.3) аппроксимируют уравнение (4.1.8) в точке t_m .

Из общей теории разностных схем известно [10], что для сходимости разностной схемы, кроме аппроксимации, требуется устойчивость, т.е. ограниченность при всех m величин.

$$\|\delta_m(u)\|_r \text{ и } \|u_m\|.$$

Отсутствие устойчивости может привести и при выполнении условия аппроксимации к неправильным результатам или даже к расходимости вычислительного процесса.

В главе 2 приведен хорошо известный пример для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$u'(t) + au(t) = 0, \quad u(0) = 1, \quad a > 0, \quad (4.2.4)$$

рассмотрены две разностные схемы для этого уравнения, явная и неявная, и показано, что неявная схема устойчива при любых θ , явная схема устойчива только при $a\theta < 2$, а качественно правильные результаты дает при $a\theta < 1$.

Схемы, являющиеся устойчивыми при ограничениях на величину шага, называются условно устойчивыми. Схема называется безусловно устойчивой, если она устойчива при любом θ .

Для исследуемой динамической задачи (4.1.8) аналогом условия устойчивости явной схемы является неравенство $\theta \leq k\lambda^{-1}$, где λ - наибольшее собственное значение (квадрат собственной частоты) задачи (4.1.23).

Для недискретизированной по МКЭ задачи (4.1.23) множество собственных значений не ограничено. После дискретизации λ может оказаться достаточно большим, и его значение обычно заранее не известно.

Таким образом, необходимо исследование устойчивости разностной схемы, целесообразно применять безусловно устойчивые разностные схемы, которые следует искать среди неявных.

Исходя из изложенного, для задачи (4.1.8) рассмотрим разностную схему второго порядка точности

$$b(\gamma_m u, v) + c(\beta_m u, v) + a(\alpha_m u, v) + I_m(v) = 0 \quad (4.2.5)$$

с начальными условиями

$$u_0 = u^0, \quad u_{-1} = u^0 - \theta u^1. \quad (4.2.6)$$

Теорема 8. Для схемы (4.2.5), (4.2.6) справедливы неравенство устойчивости

$$\|\beta_m u\|_\rho + \|u_m\| \leq k \quad (4.2.7)$$

и оценка погрешности

$$\|u'(t_m) - \beta_m u\|_\rho + \|u(t_m) - u_m\| \leq k \theta^2. \quad (4.2.8)$$

Доказательство. Из (4.2.1) следуют равенства

$$\begin{aligned} \beta_m u &= (\delta_m u + \delta_{m-1} u) / 2, \\ \gamma_m u &= (\delta_m u - \delta_{m-1} u) \theta^{-1}. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Пользуясь ими, получаем разностные аналоги равенств (4.1.11):

$$\begin{aligned} b(\gamma_m u, \beta_m u) &= (2\theta)^{-1} [b(\delta_m u) - b(\delta_{m-1} u)], \\ a(\alpha_m u, \beta_m u) &= (4\theta)^{-1} [a(u_{m+1}) - a(u_{m-1})]. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Положим в (4.2.5) $v = \beta_m u$ и применим (4.2.10). Умножив на 4θ , получим:

$$\begin{aligned} 2[b(\delta_m u) - b(\delta_{m-1} u)] + 4\theta c(\beta_m u) + a(u_{m+1}) - a(u_{m-1}) + \\ + 2\theta[l_m(\delta_m u) + l_m(\delta_{m-1} u)] = 0. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Сложим равенства (4.2.11) по $m=0, 1, \dots, m_0$, применим (4.1.6) для $l_m(\delta_m u)$ и $l_m(\delta_{m-1} u)$ и (4.1.7) для $c(\beta_m u)$. Тогда из дискретного варианта леммы Гронуолла получим (4.2.7). Оценка погрешности (4.2.8) следует из устойчивости и неравенств (4.2.2).

Отметим, что равенство (4.2.11) – разностный аналог уравнения энергетического баланса (4.1.12).

Геометрически нелинейные динамические задачи

Рассмотрим динамическую задачу для геометрически нелинейной оболочки.

Индексы i, j принимают значения 1, 2.

Обозначим через $e = \{e_{i,j}\}$, $\chi = \{\chi_{i,j}\} = \{u_{3,i,j}\}$ деформации и кривизны,

$$e_{i,j}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{3,i}u_{3,j})/2. \quad (4.3.1)$$

Вытекающие из закона Гука зависимости (3.3.25) между $N = \{N_{i,j}\}$ и e и (1.3.6) между $M = \{M_{i,j}\}$ и χ запишем в виде

$$N(u) = A_0 e(u), \quad (4.3.2)$$

$$M(u) = A_1 \chi(u). \quad (4.3.3)$$

Будем обозначать скалярные произведения

$$(N, e) = \int_{\Omega} N_{i,j} e_{i,j} d\Omega, \quad (M, \chi) = \int_{\Omega} M_{i,j} \chi_{i,j} d\Omega.$$

Пусть

$$D_{i,j}(u, v) = (v_{i,j} + v_{j,i} + u_{3,i}v_{3,j} + u_{3,j}v_{3,i})/2. \quad (4.3.4)$$

и $D = \{D_{i,j}\}$.

Тогда возможная работа внутренних сил имеет вид

$$a(u, v) = (A_0 e(u), D(u, v) + A_1 \chi(u), \chi(v)),$$

а уравнение динамической задачи –

$$b(u'', v) + c(u', v) + a(u, v) + l(t, v) = 0. \quad (4.3.5)$$

Рассматриваются начальные условия (4.1.9).

Обозначим через

$$\pi(u) = [(A_0 e(u), e(u)) + (A_1 \chi(u), \chi(u))] / 2 \quad (4.3.6)$$

потенциальную энергию оболочки.

Продифференцировав (4.3.1) по t , получим, сравнив с (4.3.4):

$$\frac{d}{dt} e_{i,j}(u) = D_{i,j}(u, u'). \quad (4.3.7)$$

Из (4.3.7) следует равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A_0 e(u), e(u)) = (A_0 \varepsilon(u), D_1 u, u'). \quad (4.3.8)$$

Положив в (4.3.5) $v = u'$ и применив (4.3.8) и (4.1.11), получим уравнение энергетического баланса

$$\frac{d}{dt} [b(u') / 2 + \pi(u)] + c(u', u') + l(t, u') = 0, \quad (4.3.9)$$

аналогичное (4.1.12).

Существование и единственность решения динамической задачи для уравнения Кармана (4.3.5) с начальными условиями установлены в [40, 52].

Доказательство приведено для наиболее сложного случая $c(u, v) = 0$ и существенно использует наличие инерционного слагаемого $b(u, v)$.

Для построения устойчивой разностной схемы дадим другую формулировку задачи (4.3.5), приведенную в [25]. Обозначим

$$a_M(u, v) = (A_M \chi(u), \chi(v)), \quad a_M(u) = a_M(u, u),$$

$$\|N\|^2 = (A_0^{-1} N, N)$$

и запишем уравнение (4.3.5):

$$b(u'', v) + c(u', v) + (N, D(u, v)) + a_1(u, v) + l(t, v) = 0. \quad (4.3.10)$$

Уравнение для N получим дифференцированием (4.3.2):

$$A_0^{-1} N' - D(u, u') = 0 \quad (4.3.11)$$

и добавим начальное условие для N , следующее из (4.3.2) при $t=0$:

$$N(0) = A_0 e(u^0) = N^0. \quad (4.3.12)$$

Из (4.3.2) также следует, что

$$(A_0 e(u), e(u)) = (A_0^{-1} N(u), N(u)),$$

поэтому из (4.3.6)

$$\pi(u) = N_*^2 + a_1(u))/2.$$

Уравнение (4.3.9) можно получить, положив в (4.3.10) $v=u'$ и домножив (4.3.11) скалярно на N .

Разностная схема для (4.3.10), (4.3.12) имеет вид

$$b(\gamma_m u, v) + c(\beta_m u, v) + (\alpha_m N, D(u_m, v)) + a_M(\alpha_m u, v) + l_m(v) = 0, \quad (4.3.13)$$

$$A_0^{-1} \beta_m N - D(u_m, \beta_m u) = 0 \quad (4.3.14)$$

с начальными условиями

$$u_0 = u^0, \quad u_1 = u_0 - \theta u^1, \quad N_0 = N^0, \quad N_{-1} = N^0 - \theta AD(u^0, u^1). \quad (4.3.15)$$

Теорема 9. Для схемы (4.3.13) – (4.3.15) справедливы неравенство устойчивости

$$\|\delta_m u\| + \|N\| + \sqrt{a_1(u)} \leq k \quad (4.3.16)$$

и оценка погрешности

$$\|u(t_m) - \delta_m u\|_{\rho} + \|N(t_m) - N_m\| + \sqrt{a_M(u(t) - u_m)} \leq k \theta^2. \quad (4.3.17)$$

Доказательство. Положим в (4.3.13) $v=\beta_m u$, умножим (4.3.14) скалярно на $\alpha_m N$ и сложим с (4.3.14). Применив (4.2.16), получим аналогичное (4.2.17) равенство

$$\begin{aligned} & 2[b(\delta_m u) - b(\delta_{m-1} u)] + \|N_{m+1}\|^2 - \|N_{m-1}\|^2 + a_M(u_{m+1}) - a_M(u_{m-1}) + \\ & + 4\theta c(\beta_m u) + 2\theta[l_m(\delta_m u) + l_m(\delta_{m-1} u)] = 0. \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

Как и при доказательстве теоремы 8, сложим равенства (4.3.18), применим (4.1.6) и (4.1.7). Из дискретного варианта леммы Гронуолла получим (4.3.16), а затем и оценку погрешности (4.3.17).

Для решения системы (4.3.13), (4.3.14) воспользуемся равенством

$$\beta_m u = (\alpha_m u - u_{m-1})\theta^{-1}, \quad (4.3.19)$$

и из (4.3.14) получим

$$\alpha_m N = A_0 D(u_m, \alpha_m u) + N_{m-1} - A_0 D(u_m, u_{m-1}). \quad (4.3.20)$$

Подставив в (4.3.13), получим уравнение относительно u_{m+1} :

$$b(\gamma_m u, v) + c(\beta_m u, v) + (A_0 D(u_m, \alpha_m u), D(u_m, v)) + a_M(\alpha_m u, v) + (N_{m-1} - A_0 D(u_m, u_{m-1}), D(u_m, v)) + I_m(v) = 0. \quad (4.3.21)$$

Для геометрически нелинейных стержней имеем

$$e(u) = e_{1,1}(u) = u_{1,1} + (u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2)/2,$$

$$N(u) = N_1(u) = EF e(u), \quad A_0 = EF;$$

$$D(u, v) = D_{1,1}(u, v) = v_{1,1} + u_{2,1} v_{2,1} + u_{3,1} v_{3,1},$$

$$a(u, v) = \int_0^L EF e(u) D(u, v) dx_1 + a_M(u, v),$$

где изгибные и крутильные слагаемые возможной работы определяются, как в линейном случае по (1.2.23), (1.2.7).

Динамическая задача имеет вид (4.3.5). Исследование уравнения и разностных схем – аналогично пластине.

Отметим в заключение, что рассмотренные динамические геометрически нелинейные задачи, в отличие от статических, всегда имеют единственное решение.

Поэтому геометрически нелинейные задачи, не удовлетворяющие в статической постановке условию монотонности (единственности решения), такие, как задачи «прощёлкивания» и подобные, целесообразно рассматривать и решать как динамические.

Задачи вязко-упруго-пластичности

Обозначим через $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$ напряжения и деформации. Линейный закон Гука (1.1.3) запишем в виде

$$\sigma = A\varepsilon, \quad (4.4.1)$$

скалярное произведение σ и ε обозначим

$$(\sigma, \varepsilon) = \int_{\Omega} \sigma_{i,j} \varepsilon_{i,j} d\Omega. \quad (4.4.2)$$

Деформации линейно связаны с перемещениями зависимостями Коши (1.1.1).

Согласно [16], динамическая задача вязко-упруго-пластичности имеет вид (при отсутствии трения)

$$b(u'', v) + (\sigma, \varepsilon(v)) + l(t, v) = 0, \quad (4.4.3)$$

$$A^{-1} \dot{\sigma} + g(\sigma) - \dot{\varepsilon}(u) = 0 \quad (4.4.4)$$

при начальных условиях

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad \sigma(0) = \sigma^0. \quad (4.4.5)$$

Равенство (4.4.3) аналогично (4.1.8). Уравнение (4.4.4) означает, что деформация ε является суммой упругой и неупругой, упругие деформации определяются законом Гука (1.1.2), записанном здесь в виде

$$\varepsilon' = A^{-1} \sigma',$$

скорость неупругих – определяется некоторой функцией $g(\sigma) = \{g_{ij}(\sigma)\}$, которая зависит от выбранного условия упругости.

Предполагается, что $g(0)=0$ и

$$(g(\sigma_1) - g(\sigma_2), \sigma_1 - \sigma_2) \geq k \|\sigma_1 - \sigma_2\|^2, \quad (4.4.6)$$

$$\|g(\sigma)\| \leq k \|\sigma\|. \quad (4.4.7)$$

$$\text{где } \|\sigma\|^2 = (A^{-1} \sigma, \sigma).$$

Неравенство (4.3.6) доказано в [16] для классических условий упругости Мизеса и Треска.

Положим в (4.4.3) $v=u'$, уравнение (4.4.4) умножим скалярно на σ и сложим с (4.4.3).

Применив (4.1.11), получим равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [b(u') + (A^{-1} \sigma, \sigma)] + (g(\sigma), \sigma) + l(t, u) = 0, \quad (4.4.8)$$

являющиеся аналогом уравнения энергетического баланса (4.1.12). Из (4.4.6) получаем при $\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = 0$, что

$$(g(\sigma), \sigma) \geq 0,$$

поэтому при отсутствии внешних сил производная полной энергии отрицательна, колебания затухают.

Равенство (4.4.8), а также существование и единственность решения задачи (4.4.3) – (4.4.5) доказаны в [16].

Разностная схема для задачи (4.4.4) – (4.4.5) имеет вид

$$b(\gamma_m u, v) + (\alpha_m \sigma, \varepsilon(v)) + l_m(v) = 0, \quad (4.4.9)$$

$$A^{-1} \beta_m \sigma + g(\sigma_m) - \varepsilon(\beta_m u) = 0, \quad m = 0, 1, \dots \quad (4.4.10)$$

при начальных условиях

$$u_0 = u^0, \quad u_{-1} = u_0 - \theta u^1, \quad \sigma_0 = \sigma^0, \quad \sigma_{-1} = \sigma^0 - \theta A(\varepsilon(u^1) - g(\sigma^0)) \quad (4.4.11)$$

Теорема 10. Для схемы (4.4.8) – (4.4.10) справедливы неравенство устойчивости

$$\|\delta_m u\|_{\rho} + \|\sigma_m\| \leq k \quad (4.4.12)$$

и оценка погрешности

$$\|u'(t_m) - \delta_m u\|_{\rho} + \|\sigma(t_m) - \sigma_m\| \leq k \theta^2. \quad (4.4.13)$$

Доказательство: Положим в (4.4.9) $v = \beta_m u$, умножим (4.4.10) скалярно на $\alpha_m \sigma$ и сложим с (4.4.9). Применяя (4.2.16), получим аналогичное (4.2.17) равенство

$$2[b(\delta_m u) - b(\delta_{m-1} u)] + \|\sigma_{m+1}\|^2 - \|\sigma_{m-1}\|^2 + \\ + 4\theta(g(\sigma_m), \alpha_m \sigma) + 2\theta[l_m(\delta_m u) + l_m(\delta_{m-1} u)] = 0. \quad (4.4.14)$$

Далее, как при доказательстве теоремы 8, сложим равенства (4.4.14), применим (4.1.6) для l_m , (4.4.7) для $(g(\sigma_m), \alpha_m \sigma)$.

Из дискретного варианта леммы Гронуолла получим (4.4.12), а затем и оценку погрешности (4.4.13).

При решении системы двух уравнений (4.3.9), (4.3.10) воспользуемся равенством

$$\beta_m u = (\alpha_m u - u_{m-1})\theta^{-1},$$

тогда из (4.4.10) находим

$$\alpha_m \sigma = A\varepsilon(\alpha_m u) + d_m(u, \sigma), \quad (4.4.15)$$

$$\text{где } d_m(u, \sigma) = \sigma_{m-1} - A\varepsilon(u_{m-1}) - \theta A g(\sigma_m). \quad (4.4.16)$$

Подставив в (4.4.9), получим уравнение относительно u_{m+1} :

$$b(\gamma_m u, v) + a(\alpha_m u, v) + d_m(u, \sigma) + l_m(v) = 0, \quad (4.4.17)$$

где $a(u, v)$ - билинейный функционал линейной задачи.

Положив в (4.4.3) и (4.4.9) $b(u, v) = 0$, получим квазистатическую задачу, исследованную в [16] и приближенную схему для такой задачи.

Переход к стержням и оболочкам в (4.4.17), (4.4.15) выполняется из соответствующих предположений о перемещениях и деформациях так же, как для статической физически нелинейной задачи.

Как и в статическом случае, возможны одновременный учет геометрической нелинейности и вязко-упруго-пластичности. Уравнение (4.4.4) записывается в виде

$$A^{-1} \dot{\sigma} + g(\sigma) - D(u, \dot{u}) = 0,$$

а уравнение (4.4.3)

$$b(\dot{u}, v) + (\sigma, D(u, v)) + l(t, v) = 0.$$

Исследование уравнений, построение и исследование разностных схем производится аналогично.

Односторонние динамические задачи

Как следует из рассмотрения статических односторонних задач (раздел 3.6.), динамические односторонние задачи имеют вид

$$b(\ddot{u}, v) + c(\dot{u}, v) + a(u, v) + d(u, v) + l(t, v) = 0 \quad (4.5.1)$$

при начальных условиях (4.1.9).

Нелинейный по u функционал $d(u, v)$ определен в разделе 3.6. для конкретных задач. Здесь будет предполагаться, что для всех $u, v \in V$

$$|d(u, v)| \leq k(a(u) + c(v) + b(v)). \quad (4.5.2)$$

Уравнение энергетического баланса имеет вид

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [b(\dot{u}) + a(u)] + c(\dot{u}, \dot{u}) + d(u, \dot{u}) + l(t, \dot{u}) = 0. \quad (4.5.3)$$

Из (4.5.2) и леммы Гронуолла следует существование и единственность решения задачи (4.5.1).

Разностная схема имеет вид

$$b(\gamma_m u, v) + c(\beta_m \dot{u}, v) + a(\alpha_m u, v) + d(u_m, v) + l_m(v) = 0 \quad (4.5.4)$$

с начальными условиями (4.2.11).

Положив $v = \beta_m \dot{u}$, как и при доказательстве теоремы 8 получим, применяя (4.5.2), неравенство устойчивости (4.2.7) и оценку погрешности (4.2.8).

Обозначения

Математика

R^n	- n – мерное пространство;
$x=(x_1, \dots, x_n) \in R^n$	- n – мерный вектор;
$\Omega \subset R^n$	- ограниченная замкнутая область в R^n ;
Γ	- граница области Ω ;
ν	- единичный вектор нормали к Γ , направленный от Ω ;
$u(x)$	- функция n переменных.

Суммирование по повторяющимся индексам:

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Скалярное произведение векторов из R^n

$$(x, y)_i = x_i y_i$$

Векторное произведение векторов из R^3

$$[x, y] = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) \in R^3$$

Производные:

$$\partial_i u = u_{,i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad - \text{частная производная по } x_i;$$

$$u_{,i,j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad - \text{вторые производные и т.д.};$$

$$\partial_\nu u = u_{,i} \nu_i \quad - \text{производная по нормали};$$

$$\Delta u = u_{,i,i} \quad - \text{оператор Лапласа}$$

Мультииндекс $i=(i_1, \dots, i_n)$ - вектор с целыми неотрицательными компонентами,

$$|i| = i_1 + \dots + i_n$$

используется для сокращенных записей:

$$x' = (x_1^{i_1}, \dots, x_n^{i_n}),$$

$$D' u = \frac{\partial^{|i|} u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}.$$

Символ Кронекера:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Пространство интегрируемых функций $L_2=L_2(\Omega)$ – множество определенных в Ω функций $u(x)$, для которых конечна норма

$$\|u\|_0 = \sqrt{\int_{\Omega} |u(x)|^2 d\Omega}.$$

Пространство С.Л.Соболева дифференцируемых функций $H^k(\Omega)=H^k$ - множество функций $u(x)$, для которых конечна норма

$$\|u\|_k = \sqrt{\sum_{|i| \leq k} \int_{\Omega} |D^i u(x)|^2 d\Omega}.$$

$$k \geq 0, \text{ целое; } L_2 = \dot{H}^0.$$

Аналогично определяются $L_2(\Gamma)$, $H^k(\Gamma)$.

Скалярное произведение в H^k :

$$(u, v)_k = \int_{\Omega} \sum_{|i| \leq k} D^i u(x) D^i v(x) d\Omega.$$

Функционал $l(u)$ -функция от $u \in H^k$ со значениями в R^1 .

Функционал линейен, если

$$l(\alpha u + \beta v) = \alpha l(u) + \beta l(v), \quad \alpha, \beta \in R.$$

Билинейный функционал (билинейная форма) $a(u, v)$ - функция от $u, v \in H^k$, со значениями в R , линейная по u и по v .

Билинейная форма

$$\text{симметрична, если} \quad a(u, v) = a(v, u),$$

$$\text{неотрицательна, если} \quad a(u, u) \geq 0$$

$$\text{коэрцитивна (положительно определена), если} \quad a(u, u) \geq k \|u\|_k^2.$$

Функционал $l(u)$ выпуклый, если при $0 \leq t \leq 1$ справедливо неравенство

$$l((1-t)u_1 + tu_2) \leq (1-t)l(u_1) + tl(u_2)$$

Вектор-функцию $(x^{j_1} \dots x^{j_n})$, где $x \in R^n$, J_k -мультииндекс, обозначаем x^j .

Для мультииндекса m :

$$\|u\|_m^2 = \|u_i\|_{m_i}^2, \quad \|u\|_{2m}^2 = \|u_i\|_{2m_i}^2.$$

Для целого τ , $m_{i+} \geq 0$:

$$\|u\|_{m+\tau}^2 = \|u_i\|_{m_i+\tau}^2.$$

Скалярное произведение для вектор-функций:

$$(u, v)_i = (u_i, v_i)_{m_i}.$$

Множество функций, имеющих в Ω непрерывные производные до порядка $k \geq 0$ включительно, обозначаем $C_k(\Omega)$, $C_0(\Omega)$ – множество непрерывных в Ω функций.

Производная функционала [30], [37]

Производной Фреше произвольного функционала $I(u)$ называется линейный функционал $I'_u(v)$, такой, что выполнено равенство

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{|I(u+v) - I(u) - I'_u(v)|}{\|v\|} = 0.$$

Производная Гато произвольного функционала $I(u)$ определяется равенством

$$I'_u(v) = \frac{d}{dt} [I(u + tv)]_{t=0}.$$

Если производная Фреше является непрерывной функцией от u , то производные Фреше и Гато совпадают.

Носитель функции и функционала [30]

Носитель функции $\text{supp } u(x) \subset \Omega$ – наименьшее замкнутое множество, вне которого $u(x)=0$.

Функционал $I(u)$ равен нулю на открытом множестве $\Omega_0 \subset \Omega$, если $I(u)=0$ при всех u , таких что $\text{supp } u \subset \Omega_0$.

Дополнение множества Ω_0 в Ω , т.е. $\Omega \setminus \Omega_0$ называется носителем функционала $I(u)$, обозначается $\text{supp } I(u)$.

Например, для функционала $I(u) = \int_{\Omega_0} u(x) d\Omega$, $\Omega_0 \subset \Omega$, $\text{supp } I(u) = \overline{\Omega_0}$ (замыкание Ω_0),

для функционала $I(u)=u(x_0)$ или $I(u)=\partial_j u(x_0)$ носителем является множество, состоящее из точки x_0 .

Теория множеств

$a \in A$ – элемент a принадлежит множеству A ;

$B \subset A$ – все элементы множества B принадлежит множеству A ;

$A \cap B$ – пересечение множеств A и B – состоит из всех элементов, принадлежащих и A , и B ;

$A \cup B$ – объединение множеств A и B – состоит из всех элементов, принадлежащих либо A , либо B .

Механика

$u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$	- вектор-функция перемещений;
$\chi(x)$	- вектор-функция возможных перемещений;
$f(x), F(x)$	- вектор-функции внешних сил, приложенных в Ω и на Γ ;
$\varepsilon_{i,j}(u), e_{i,j}(u), i, j = 1, 2, 3$	- линейный и нелинейный тензоры деформаций
$\varepsilon_0(u) = \varepsilon_{i,i}(u)$	- средняя деформация;
$\sigma_{i,j}(u) = \sigma_{j,i}(u)$	- тензор напряжений;
$\sigma_0(u) = \sigma_{i,i}(u)$	- среднее напряжение;
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	- главные напряжения;
$s_2 = \sqrt{\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2 \right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3 \right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1 \right)^2 \right] / 2},$	
$s_3 = (\sigma_1 - \sigma_0/3)(\sigma_2 - \sigma_0/3)(\sigma_3 - \sigma_0/3),$	
$\psi = \frac{1}{3} \arcsin(27J_3/2s_2^3),$	
$\sigma_0 = s_1, s_2, u, s_3$	- инварианты тензора напряжений;
E	- модуль Юнга;
μ	- коэффициент Пуассона;
$G = \frac{E}{1 + \mu}$	- модуль сдвига;
T	- температура;
c	- коэффициент температурного расширения;
Γ_u	- часть границы, где заданы перемещения;
Γ_F	- часть границы, где заданы поверхностные силы F ;
$\sigma_v = (\sigma_{v,1}, \sigma_{v,2}, \sigma_{v,3})$	- вектор напряжений по нормали к Γ , $\sigma_{v,i} = \sigma_{i,j} \nu_j$.

Возможная работа внутренних сил

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma_{i,j}(u) \varepsilon_{i,j}(v) d\Omega.$$

Возможная работа внешних сил

$$l(v) = \int_{\Omega} f_i(x) v_i(x) d\Omega + \int_{\Gamma_F} F_i(x) v_i(x) d\Gamma.$$

Множество допустимых перемещений V - множество функций u , для которых конечна величина $a(u, u)$, и которые удовлетворяют граничным условиям на Γ_u .

Множество V называется также энергетическим пространством.

Поскольку обычно $a(u,u) \geq 0$, то величину $\sqrt{a(u,u)} = \|u\|_v$ - называют энергетической нормой.

Стержни

- L - длина стержня;
- Ω_0 - область, занимаемая сечением;
- Γ_0 - граница Ω_0 ;
- F - площадь сечения;
- J_1 - момент инерции кручения;
- J_2, J_3 - главные центральные моменты инерции;
- J_ω - бимомент инерции;
- F_2, F_3 - сдвиговые площади;
- N_i, M_i - внутренние силы и моменты,

$(N_1=N, N_2=Q_x, N_3=Q_y, M_1=M_x=M_{kp}, M_2=M_y, M_3=M_z)$.

Пластины

- Ω - двумерная область, занимаемая срединной плоскостью;
- δ - толщина;
- $D = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)}$ - цилиндрическая жесткость;
- $N_{i,p}, M_{i,j}$ - внутренние силы и моменты

$(N_{1,3}=Q_x, N_{2,3}=Q_y, N_{3,3}=0, M_{1,3}=M_{3,3}=0)$;

$\chi_{i,j}, i,j=1,2$ - кривизны.

Динамика

- ρ - плотность материала;
- $b(u,v)$ - возможная работа сил инерции;
- $c(u,v)$ - возможная работа сил сопротивления.

МКЭ

- Ω_r - конечные элементы;
- x_k - узлы;
- Ω^k - звезда элементов;
- L_k - узловыe неизвестные;
- μ_k - базисные функции;
- h - наибольший из диаметров Ω_r (диаметр Ω_r – наибольшее расстояние между двумя точками из Ω_r);
- V_h - множество линейных комбинаций функций μ_k , удовлетворяющих при $x_k \in \Gamma_u$ граничным условиям;
- $P^s(\Omega_r)$ - множество многочленов степени s на Ω_r ;
- $\mathcal{Q}^s(\Omega_r)$ - множество функций, являющихся произведением многочленов степени s по каждой переменной;
- $a_r(u, v)$,
 $l_r(v)$ - возможные работы внутренних и внешних сил по области Ω_r .

Конечные разности

θ - шаг по времени;

$$t_m = m\theta;$$

$$u_m = u(t_m);$$

$$\alpha_m u = (u_{m+1} + u_{m-1})/2;$$

$$\delta_m u = \theta^{-1}(u_{m+1} - u_m);$$

$$\gamma_m u = \theta^{-1}(\delta_m u - \delta_{m-1} u) = \theta^{-2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1});$$

$$\beta_m u = (\delta_m u - \delta_{m-1} u)/2 = (2\theta)^{-1}(u_{m+1} - u_{m-1}).$$

Используемые теоремы [30, 55, 8, 16, 56]

Неравенство Буняковского:

$$\text{если } \|a\| = \sqrt{(a, a)}, \text{ то } |(a, b)| \leq \|a\| \cdot \|b\|.$$

Неравенство треугольника:

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

Лемма Гронвалла:

если для $u(t) > 0$ при $0 < t < T$ выполнено неравенство

$$u(t) \leq k_1 + k_2 \int_0^t u(s) ds, \quad k_1, k_2 > 0,$$

то при $0 < t < T$

$$u(t) \leq k_1 e^{k_2 t}.$$

Дискретный вариант:

$$\text{если } u(t_m) \leq k_1 + k_2 \theta \sum_{i=0}^{m-1} u(t_i), \quad t_m = m\theta, \quad \theta = \max_i (t_i - t_{i-1}), \quad \text{то}$$

$$u(t_m) \leq k_1 e^{k_2 t_m}.$$

При $k_1 = 0$ получаем $u(t) = 0$.

Теоремы вложения С.Л.Соболева:

1. Пусть $\Omega \subset R^n$ и $n < 2k$.

Тогда для любой функции $u \in H^k(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\max_{x \in \Omega} u(x) \leq K \|u\|_k,$$

т.е. $u \in C_0(\Omega)$.

2. Пусть $\Omega \subset R^n$, $n < 2k$, $\Omega_0 \subset \Omega$, размерность Ω_0 равна s , $s > n - 2k$.

Тогда для любой функции $u \in H^k(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega_0} u(x) dx \leq K \|u\|_k.$$

При невыполнении условий теорем соответствующие неравенства не верны.

Следствие из теорем вложения:

если $u \in H_2^k(\Omega)$, то $u \in H_2^{k-1}(\Gamma)$.

Формула Грина (интегрирования по частям):

$$\int_{\Omega} u_{,j} \cdot v d\Omega = \int_{\Gamma} u \cdot v \cdot v_i d\Gamma - \int_{\Omega} u \cdot v_{,j} d\Omega.$$

Формула Грина может применяться и для преобразования интеграла по границе Γ в интеграл по области (при $v=1$)

$$\int_{\Gamma} u \cdot v_i d\Gamma = \int_{\Omega} u_{,i} d\Omega$$

Неравенство Корна:

если $\varepsilon_{i,j}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$, то

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{i,j}(u) \varepsilon_{i,j}(u) d\Omega + \int_{\Omega} u_i u_i d\Omega \geq k \|u\|_1 \cdot \|u\|_1.$$

Теорема Ф.Рисса:

Для любого линейного ограниченного в гильбертовом пространстве H функционала $l(v)$ существует единственный элемент $u \in H$, такой что $l(v) = (u, v)$,
где (u, v) – скалярное произведение в H .

Список литературы

1. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
3. Власов В.З. Общая теория оболочек. М.: Гостехиздат, 1949. – 473 с.
4. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. – 407 с.
5. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гостехтеориздат, 1956. 419 с.
6. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз, 1967. 984 с.
7. Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. – М.: Наука, 1989. -373 с.
8. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
9. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. 574 с.
10. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1973. 439 с.
11. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. 465 с.
12. Горбовец А.В., Евзеров И.Д. Приближенные схемы для стационарных и нестационарных задач с односторонними ограничениями// Вычислительные технологии. - 2000. Т.5. №6. – С. 33-35.
13. Городецкий А.С., Евзеров И.Д., Карпиловский В.С. Исследование методов решения систем уравнений нелинейной теории упругости. – Киев, 1981. 49 с. Деп. УкрНИИНТИ 04.09.81, № 2193.
14. Гришин А.В., Федорова Е.Ю. Нелинейная динамика ограждающих сооружений. – Одесса: ОНМУ, 2002. -240 с.
15. Деклу Ш. Метод конечных элементов. М.: Мир, 1976. - 95 с.
16. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
17. Евзеров И.Д. Сходимость МКЭ в случае не принадлежащих энергетическому пространству базисных функций// Вычисления с разреженными матрицами. - Новосибирск: ВЦСО АН СССР.- 1981. С. 54-61.
18. Евзеров И.Д. Оценки погрешности по перемещениям при использовании несовместных конечных элементов. по перемещениям при использовании несовместных конечных элементов// Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск: ВЦСО АН СССР.- 1981. С. 54-61.
19. Евзеров И.Д. Оценки погрешности полудискретных несовместных аппроксимаций при решении нестационарных задач. Киев, 1983.-9 с. - Деп. УкрНИИНТИ 15.09.83, № 2395к-Д83.
20. Евзеров И.Д. Неконформные конечные элементы в задаче на собственные значения// Численные методы механики сплошной среды. –1984. Т.15. - №5 -С. 84-90.
21. Евзеров И.Д., Здоренко В.С. Сходимость прямолинейных конечных элементов при расчете криволинейных стержней//Сопротивление материалов и теория сооружений. – Киев: Будивельник.- 1983. – вып.42. - С. 99-101.
22. Евзеров И.Д., Здоренко В.С. Сходимость плоских конечных тонкой оболочки//Строительная механика и расчет сооружений. – 1984. - №1. - С. 35-40.
23. Евзеров И.Д. Неконформные конечные элементы для нелинейных уравнений с монотонными операторами// Численные методы механики сплошной среды. –1985. – Т.16. - №5. - С. 49-56.
24. Евзеров И.Д. Аппроксимация по частям в методе конечных элементов// Моделирование в механике. – Новосибирск, 1988. Т.2(19).– №5. - С. 73-83.

25. Евзеров И.Д. Приближенная схема для задачи о нелинейных колебаниях тонких пластин// Моделирование в механике. – Новосибирск, 1989. Т.3(20).– №2. – С. 54-63.
26. Евзеров И.Д. Неконформные конечные элементы для гиперболического уравнения с длительной памятью// Дифференциальные уравнения. –1990. Т.26.– №7. – С. 1272-1274.
27. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
28. Зенкевич О.К., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
29. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
30. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
31. Канторович Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика// – УМН. –1948. Т.3 – С. 89-185.
32. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 742 с.
33. Карпиловский В.С. Методы конструирования конечных элементов. – Киев, 1980.-50 с. – Деп. УкрНИИНТИ 23.06.80, № 2153.
34. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 318 с.
35. Качуровский Р.И. Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах// – УМН. –1968. Т.23 – №1. – С. 121-168.
36. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
37. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 455 с.
38. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1969. 407 с.
39. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.7. Теория упругости.- М.: Наука, 1987. – 246 с.
40. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
41. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 547 с.
42. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
43. Михлин С.Г. Вариационно-сеточная аппроксимация// Записки научн. семин.- ЛОМИ. 1974. Т.48. – С. 32-188.
44. Митчел Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1981. – 216 с.
45. Морозов Н.Ф. О нелинейных колебаниях тонких пластин с учетом инерции вращения// ДАН СССР. –1967. Т.176. – №3. – С. 522-525.
46. Михлин С.Г. Вариационно-сеточная аппроксимация// Записки научн. семин.- ЛОМИ. –1974. Т.48 – С. 32-188.
47. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: ГСИСП, 1962. – 401 с.
48. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.: Гостехтеориздат, 1948. – 333 с.
49. Обен Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. – М.: Мир, 1977. – 383 с.
50. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностный метод решения эллиптических уравнений. – Ереван.: Изд-во АрмССР, 1979. – 238 с.
51. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. –558 с.
52. Панагитопулос П. Неравенства в механике и их приложения. – М.: Мир, 1989. – 492 с.
53. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. – М.: Мир, 1988. – 411 с.

54. Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. – С-Пб.: Изд-во С-ПбГТУ, 1998. – 418 с.
55. Скрыпник И.В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. – Киев: Наукова думка, 1973. – 217 с.
56. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 333 с.
57. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 418 с.
58. Стрельченко А.И. Внешние аппроксимации в задачах о спектре// Вычисления с разреженными матрицами. – Новосибирск, Изд-во ВЦСОАН СССР. – 1981. – С. 142-149.
59. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
60. Сьярле Ф., Рабье П. Уравнения Кармана. – М.: Мир, 1983. – 172 с.
61. Темам Р. Уравнения Навье - Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
62. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки. – М.: Гостехиздат, 1948. – 460 с.
63. Arnold D.N., Brezzi F. Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates. – “MAN”, ser. RAIRO Anal. Numer. J., 1985, 19, №1, 7-32.
64. Arnold D.N., Babuska I., Osborn J. Finite element methods: principles for their selection. – Comput. Meth. Appl. Mech., Eng., 1984, 45, №1-3.
65. Axelrad E.L., Emmerling F.A. ed., Flexible shells: theory and applications. – Berlin: Springer, 1984.
66. Aziz A. ed., The mathematical foundation of finite element method. – N.Y: Acad. Press, 1973.
67. Browder F.E. Nonlinear elliptic boundary value problem. – Bull. Amer. Math. Soc., 1963, v. 69, 862-874.
68. Ciarlet P. Numerical analysis of the finite element method. – Semin. Math. Super., Univ. de Montreal, Canada, 1975.
69. Ciarlet P., Raviart P. General Lagrange and Hermite interpolation in R_n with applications to finite element method. – Arch. Ration. Mech., Anal., 1972, 46, №3, 117-179.
70. Ciarlet P., Paumier J.-C. Une justification des equations de Marquerre von Karman pour les coques peu profondes. – C.R. Acad. Sci., 1985, ser I., v. 301, №18, 857-860.
71. Courant R. Variable methods for the solution of problem of equilibrium and vibration. – Bull. Amer. Math. Soc., 1943, №1.
72. Cea J. Approximation variationnelle des problemes aux limites. – Ann. I inst. Fourier., 1964, 14, 345-444.
73. Clough R.W., Bathe K.J. Finite element analysis of dynamic response. The Univ. of Alabama in Huntsville Press, 1972, 153-159.
74. Destuynder P. A classification of thin shell theories. – Acta appl. math., 1985, 4, №1, 15-63.
75. Fraeijs de Vebeke B. Variational principles and the patch test. – Int. J. Numer. Eng., 1974, 8, №4, 783-801.
76. Jonson C. On finite element method for curved shells using flat elements. – in: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Int. Ser. Numer. Math., Basel-Stuttgart, Birkhauser Verlag, 1975, 147-154.
77. Janovsky V., Prohazka P. The nonconforming finite element method in the problem of clamped plate with ribs. – Appl. Math., 1976, 21, №4, 273-289.
78. von Karman T., Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. – Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften, Vol IV/4C, pp. 311-385, Leipzig, 1911.

79. Lesaint P. On the convergence of Wilson nonconforming element for solving the elastic problem. – *Comput. Meth. Appl. Mech., Engrg.*, 1976, 7, №1, 1-16.
80. Lascaux P., Lesaint P. Some nonconforming finite elements for the plate bending problem. – *Rev. Francaise Automat. Inform Recherche Operationelle, Ser. Rouge Anal. Numer. R-I*, 1975, 9-53.
81. Miyoshi T. Convergence of finite element solution, represented by a nonconforming basis. – *Kumamoto J. Sci. (Math.)*, 1972, 9, №1, 11-20.
82. Nitsche J. Ein Kriterium fur die Quasioptimalitat des Ritzchen Verfahrens. – *Numer. Math.*, 1968, 11, 346-349.
83. Nitsche J. Convergence of nonconforming methods in: *Mathematical aspects of finite element in partial differential equations*. – N.-Y.: 1974, 11-54.
84. Oden J., Reddy J. *An introduction to the mathematical theory of finite elements*. – N.-Y.: Willey, 1976.
85. Raviart P. *Methode des elements finis*. – Cours 1971-72 a l'Univ. de Paris VI, 1972.
86. Ritz W. *Uber eine Methode zur Losung gewissen Variations – Probleme der mathematischen Physik*. – *J. Reine Angew. Math.*, 1909, 135, 1-61.
87. Strang G., Fix G. *A Fourier analysis of the finite element method*. – *Proc. SIME summer school, Italy*, 1971.

Приложение 2 Верификационные тесты

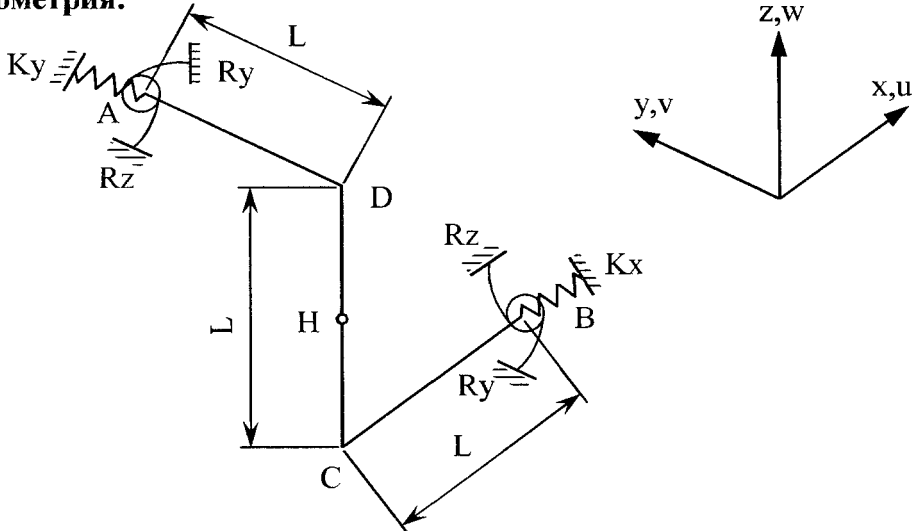
- Тесты 1-12, 30 – линейные статические задачи для стержневых систем, пластин и оболочек, трехмерные задачи .
- Тесты 13-15 – физически нелинейные задачи.
- Тесты 16-23 – геометрически нелинейные задачи для нитей, вантовых ферм и стержней.
- Тесты 24-29 – задачи устойчивости, в основном изгибно-крутильные формы потери устойчивости.
- Тесты 31-37 – статические и динамические задачи с односторонними ограничениями.
- Тесты 38-42 – модальный анализ.
- Тесты 43-48 – геометрические характеристики сечения.

В каждом тесте приведены ссылки на аналитические решения.

Тест 1 Пространственная рама с упругими опорами

Аналитическое решение: M. Laredo, *Résistance des matériaux*, Paris, Dunod, 1970, p. 165.

Геометрия:



$$\begin{aligned} L &= 2 \text{ м}; \\ I_y = I_x = I &= 10^{-6} \text{ м}^4; \\ J &= 2.0 \times 10^{-6} \text{ м}^4; \\ A &= 0.001 \text{ м}^2. \end{aligned}$$

Характеристика материала: Изотропный упругий, $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Па}$, $G = 7.875 \times 10^{10} \text{ Па}$.

Граничные условия:

В точке A: $\theta_y = 0$, $u_A = w_A = 0$; $K_y = 52500 \text{ Н/м}$ (жесткость на сжатие-растяжение);

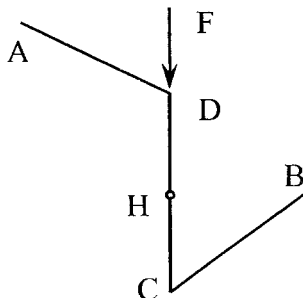
$R_x = R_z = 52500 \text{ Нм/рад}$ (жесткость на кручение).

В точке B: $\theta_x = 0$, $v_B = w_B = 0$; $K_x = 52500 \text{ Н/м}$ (жесткость на сжатие-растяжение);

$R_y = R_z = 52500 \text{ Нм/рад}$ (жесткость на кручение).

В точке H: шарнир.

Нагрузки:



$$F = -10000 \text{ Н}.$$

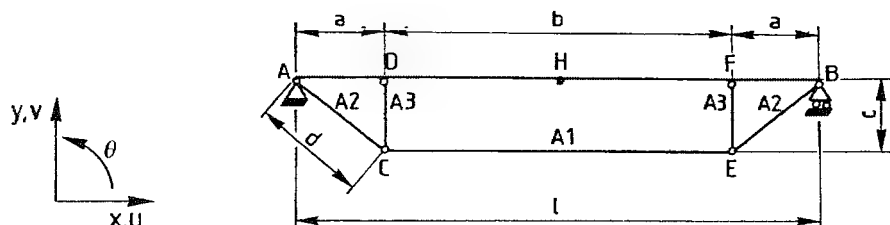
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
A	Момент M_x , Нм	-8437,5	-8437,6	0,001
A	Момент M_y , Нм	-1562,5	-1562,4	0,006
A	Момент M_z , Нм	3125,0	3124,8	0,006
B	Момент M_x , Нм	1562,5	1562,4	0,006
B	Момент M_y , Нм	8437,5	8437,6	0,001
B	Момент M_z , Нм	3125,0	3124,8	0,006
A	Перемещение v_A , м	-0,029762	-0,02976	0,006
A	Угол поворота θ_{Ax} , рад	0,16071	0,16071	0
D	Перемещение w_D , м	-0,37004	-0,37004	0

Тест 3 Балка с затяжкой

Аналитическое решение: М. Laredo, *Résistance des matériaux*, Paris, Dunod, 1970, p. 77.

Геометрия:



Стержни AD, DF, FB: $A = 0.01516 \text{ м}^2$; $A_r = A/2.5$; $I = 2.174 \times 10^{-4} \text{ м}^4$.

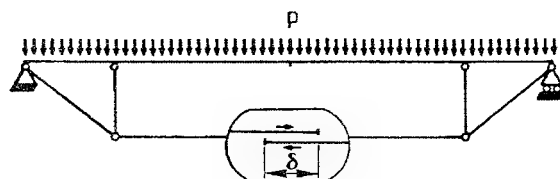
Стержни AC, DC, CE, FE, EB: $A_1 = A_2 = 4.5 \times 10^{-3} \text{ м}^2$; $A_3 = 3.48 \times 10^{-3} \text{ м}^2$.

$a = 2 \text{ м}$; $b = 4 \text{ м}$; $l = 8 \text{ м}$; $c = 0.6 \text{ м}$; $d = 2.088 \text{ м}$.

Характеристика материала: Изотропный упругий, $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Па}$, $G = 0.4 \times E \text{ Па}$.

Граничные условия: $u_A = v_A = 0$; $v_B = 0$.

Нагрузки:



$p = -50000 \text{ Н/м}$.
Затяжка стянута на
 $\delta = 6.52 \times 10^{-3} \text{ м}$.

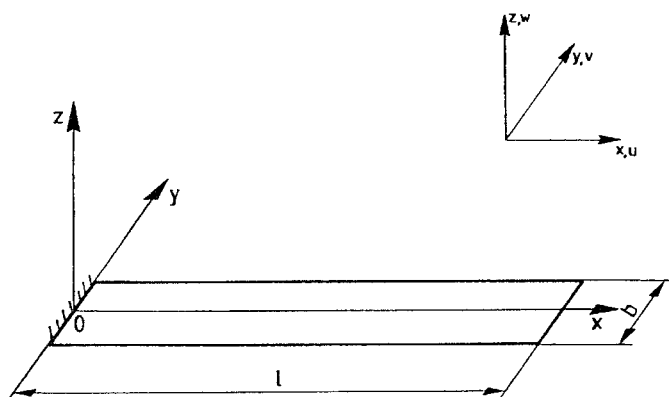
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
CE	Продольное усилие, Н	584584	584584	0
H	Момент М, Нм	49249,5	49249,5	0
D	Перемещение v_D , м	-0,0005428	-0,0005428	0

Тест 4 Прямоугольная плита

Аналитическое решение: S. Timoshenko, *Résistance des matériaux*, t. 1, Paris, Librairie Polytechnique Ch. Béranger, 1949.

Геометрия:



Толщина $h = 0.005$ м;

Длина $l = 1$ м;

Ширина $b = 0.1$ м.

Характеристика материала: $E = 2.1 \times 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$.

Граничные условия: Контур по линии $x = 0$ жестко зашце́млен.

Нагрузки: Распределенная нагрузка по площади: $p = 1700$ Па.

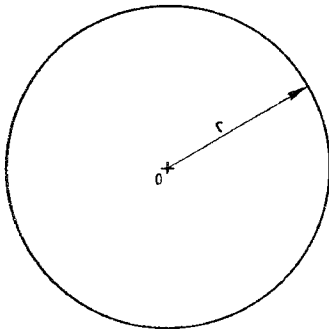
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
$x = 1$	Вертикальное перемещение, м	-0,0973	-0,09583	1,51

Тест 5 Круглая плита

Аналитическое решение: S. Timoshenko, *Résistance des matériaux*, t. 2, Paris, Librairie Polytechnique Ch. Béranger, 1949.

Геометрия:



Радиус $r = 1 \text{ м}$
Толщина $h = 0.005 \text{ м}$.

Характеристика материала: $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Па}$, $\nu = 0.3$.

Граничные условия: Жесткое защемление по внешнему краю ($u = v = w = 0$; $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$).

Нагрузки: Равномерно распределенная нагрузка по площади $p = -1000 \text{ Па}$.

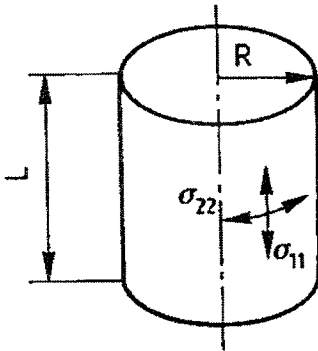
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
Центр 0	Перемещение w_0 , м	-0,0065	-0,00635	2,31

Тест 6 Цилиндр под внутренним давлением

Аналитическое решение: R.J. Roark et W.C. Young, *Formulas for stress and strain*, 5^e edition, New York, McGraw-Hill, 1975.

Геометрия:



$$R = 1 \text{ м};$$

$$h = 0.02 \text{ м};$$

$$L = 4 \text{ м}.$$

Характеристика материала: $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Па}$, $\nu = 0.3$.

Граничные условия: Отсутствуют.

Нагрузки: Внутреннее давление $p = 10000 \text{ Па}$.

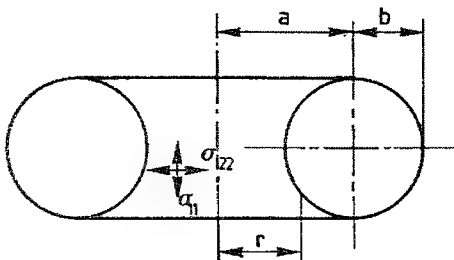
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
Точка на поверхности	σ_{11} , Па	0	0,202	-
	σ_{22} , Па	5×10^5	$4,95724 \times 10^5$	0,86
	δR , м	$2,38 \times 10^{-6}$	$2,36193 \times 10^{-6}$	0,76
	δL , м	$-2,86 \times 10^{-6}$	$-2,8327 \times 10^{-6}$	0,95

Тест 7 Тор под внутренним давлением

Аналитическое решение: R.J. Roark et W.C. Young, *Formulas for stress and strain*, 5^e edition, New York, McGraw-Hill, 1975.

Геометрия:



Радиус трубы $b = 1$ м;
Радиус $a = 2$ м;
Толщина $h = 0.02$ м.

Характеристика материала: $E = 2.1 \times 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$.

Граничные условия: Отсутствуют.

Нагрузки: Распределенная по площади $p = 10000$ Па.

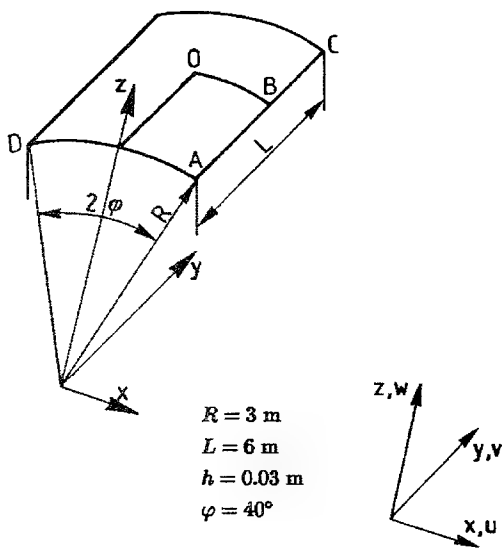
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
$\forall r$	σ_{22} , Па	$2,5 \times 10^5$	$2,45509 \times 10^5$	1,8
$r = a - b$	σ_{11} , Па	$7,5 \times 10^5$	$7,15745 \times 10^5$	4,57
	δr , м	$1,19 \times 10^{-7}$	$1,30845 \times 10^{-7}$	9,95
$r = a + b$	σ_{11} , Па	$4,17 \times 10^5$	$4,08867 \times 10^5$	1,95
	δr , м	$1,79 \times 10^{-6}$	$1,832643 \times 10^{-6}$	2,33

Тест 8 Цилиндрическая оболочка под собственным весом

Аналитическое решение: A.C. Scordelis et K.S. Lo, “Computer analysis of cylindrical shells”, *J. Amer. Concr. Inst.*, 61, 1964.

Геометрия:



Характеристика материала: $E = 3 \times 10^{11} \text{ Па}$, $\nu = 0.0$, $\gamma = 2.083 \times 10^5 \text{ кг/м}^3$.

Граничные условия: Дуга AD закреплена.

Нагрузки: Собственный вес.

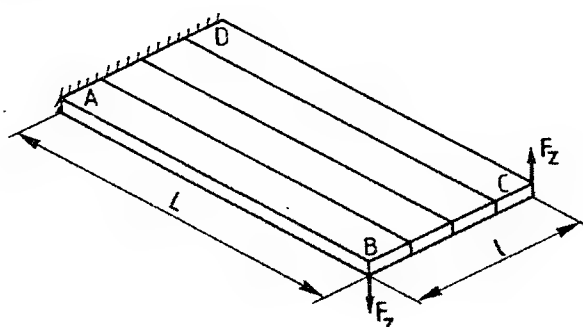
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
В	$w_B, \text{ м}$	$-3,70 \times 10^{-2}$	$-3,641 \times 10^{-2}$	1,6

Тест 9 Консольная плита под действием пары сил

Аналитическое решение: J. Robinson, Element evaluation. A set of assessment parts and tests, *Proceeding of Finite Element Methods in the commercial environment*, vol. 1, octobre 1978. J.L. Batoz et M.B. Tahar, Evaluation of new quadrilateral thin plate boundary element, *International Journal for numerical methods in engineering*, vol. 18, Jon Wiley & Sons, 1982.

Геометрия:



Толщина $h = 0.05$ м;
 $L = 12$ м;
 $l = 1$ м.

Характеристика материала: $E = 1.0 \times 10^7$ Па, $\nu = 0.25$.

Граничные условия: Сторона AD закреплена.

Нагрузки: $F_B = 1$ Н, $F_C = 1$ Н.

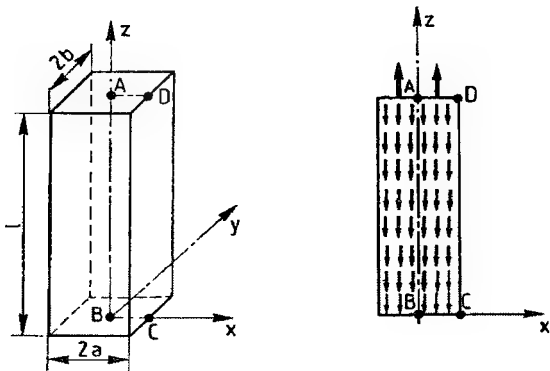
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
С	w , м	$35,37 \times 10^{-3}$	$35,2954 \times 10^{-3}$	0,21

Тест 10 Параллелепипед под действием собственного веса

Аналитическое решение: S. Timoshenko, *Théorie de l'élasticité*, Paris, Librairie Polytechnique Ch. Béranger, 1961, pages 279 – 282.

Геометрия:



$$l = 3 \text{ м};$$

$$a = b = 0.5 \text{ м}.$$

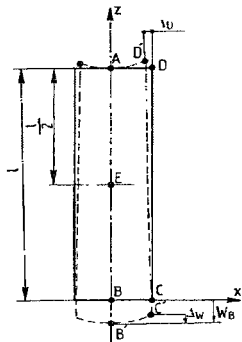
Характеристика материала: $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$, $\nu = 0.3$, $\gamma = 7800 \text{ кг/м}^3$.

Граничные условия: Точка А закреплена.

Нагрузки: Собственный вес.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

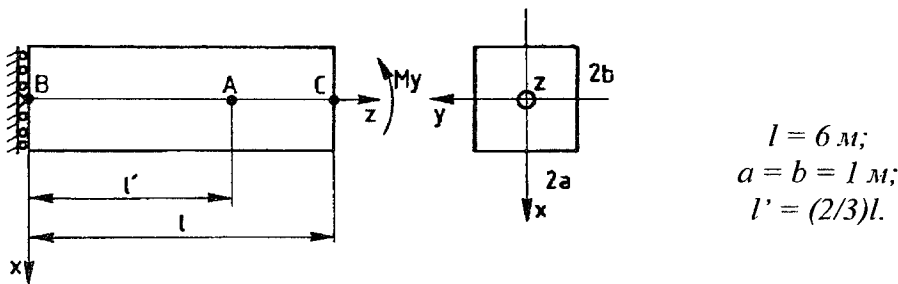
Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
В	w , м	$1,72 \times 10^{-6}$	$1,72166 \times 10^{-6}$	0,1
В и С	Δw , м	$0,014 \times 10^{-6}$	$0,01217 \times 10^{-6}$	13
А и D	Δu , м	$0,17 \times 10^{-6}$	$0,16846 \times 10^{-6}$	0,91
А	σ_{zz} , МПа	0,229	0,220171	3,85
Е	σ_{zz} , МПа	0,1145	0,114777	0,24



Тест 11 Чистый изгиб призматического бруса

Аналитическое решение: S. Timoshenko, *Théorie de l'élasticité*, Paris, Librairie Polytechnique Ch. Béranger, 1961, pages 284 – 289.

Геометрия:



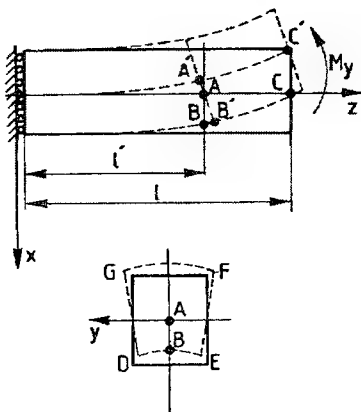
Характеристика материала: $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$, $\nu = 0.3$.

Граничные условия: На плоскости проходящей через точку В: $w = 0$,
в точке В: $w = u = v = 0$, $\theta_z = 0$.

Нагрузки: В точке С приложен момент вокруг оси Y, $M_y = 4/3 \times 10^7 \text{ Нм}$.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

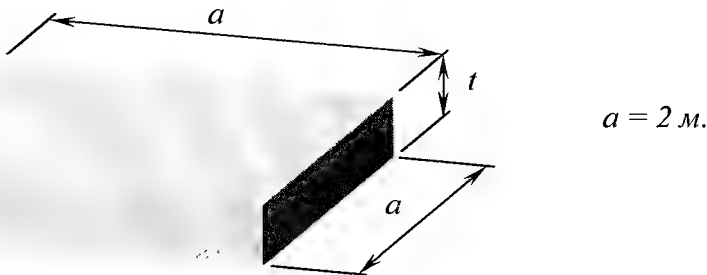
Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
А	$u_A, \text{ м}$	-4×10^{-4}	$-3,836 \times 10^{-4}$	4,1
В	$w_B, \text{ м}$	2×10^{-4}	$1,918 \times 10^{-4}$	4,1
Г и Е	$v_F = -v_G, \text{ м}$	$0,15 \times 10^{-4}$	$0,14455 \times 10^{-4}$	3,63
Д и Е	$v_D = -v_E, \text{ м}$	$-0,15 \times 10^{-4}$	$-0,14455 \times 10^{-4}$	3,63



Тест 12 Толстая плита

Аналитическое решение:

Геометрия:



Характеристика материала: $E = 3 \times 10^{10} \text{ Па}$, $\nu = 0.2$

Граничные условия: Плита защемлена по всему контуру.

Нагрузки: $P = 400 \text{ кН}$ приложена в точке $(a/2; a/2)$.

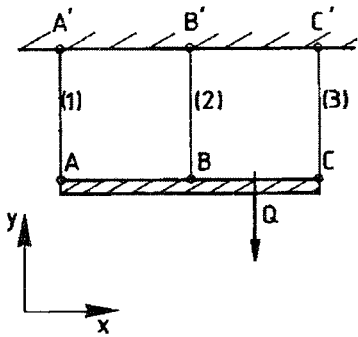
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Толщина плиты, см	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погреш- ность, %
20	Прогиб в центре плиты, w, см	0,055	0,06	9,1
30		0,024	0,025	4,17
40		0,016	0,015	6,25

Тест 13 Жесткая балка на подвесках

Аналитическое решение: В. Halphen et J. Salencon, *Elastoplasticité*, Presses de l'ENPC.

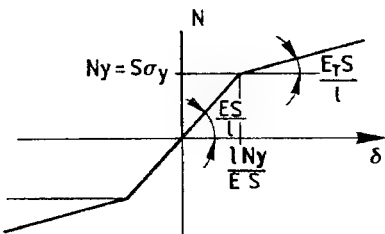
Геометрия:



$l = AA' = 1 \text{ м};$
 $S = S_{(1)} = S_{(2)} = S_{(3)} = 10^{-4} \text{ м}^2 .$

Характеристика материала:

Нелинейно упругий
 $\sigma_y = 400 \text{ МПа}, E = 2,1 \times 10^5 \text{ МПа},$
 $E_T = 0,25 \times 10^5 \text{ МПа}.$



Граничные условия: Шарниры в точках A', B', C'.

Нагрузки: Сила $Q = (13/7)\sigma_y S$ приложена в середине пролета BC.

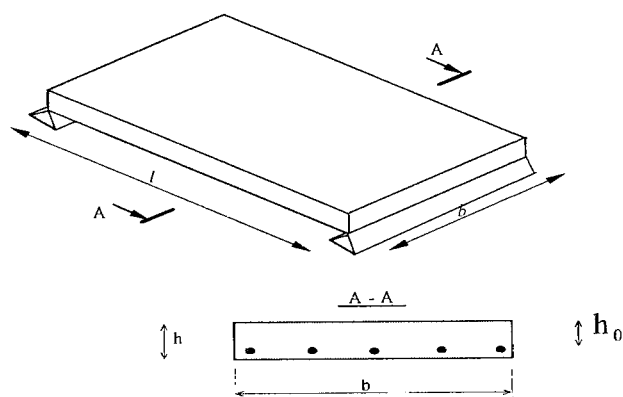
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
A	N ₁ , кН	4,16	4,51518	8,54
B	N ₂ , кН	28,762	28,1126	2,26
C	N ₃ , кН	41,333	41,6582	0,8
A	δ ₁ , м	1,995 x 10 ⁻⁴	2,15033 x 10 ⁻⁴	7,8
B	δ ₂ , м	13,696 x 10 ⁻⁴	13,3885 x 10 ⁻⁴	2,25
C	δ ₃ , м	25,397 x 10 ⁻⁴	24,6259 x 10 ⁻⁴	3,04

Тест 14 Железобетонная плита перекрытия под распределенной нагрузкой

Аналитическое решение: ЦНИИпромзданий НИИЖБ Госстроя СССР. *Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелых и легких бетонов без предварительного напряжения арматуры* (к СНиП 2.03-84), Москва, 1986, стр. 139.

Геометрия:



$$\begin{aligned} l &= 3.1 \text{ м;} \\ b &= 1 \text{ м;} \\ h &= 0.12 \text{ м;} \\ h_0 &= 0.105 \text{ м.} \end{aligned}$$

Характеристика материала:

Бетон тяжелый марки В25: $E_b = 2.7 \times 10^4 \text{ МПа}$, $R_{bt,ser} = 1.6 \text{ МПа}$, $\nu = 0.2$.
 Растянутая арматура класса А-II: $E_s = 2.1 \times 10^5 \text{ МПа}$;
 площадь арматуры: $A_s = 393 \text{ мм}^2$.

Граничные условия: Свободное опирание по короткой стороне.

Нагрузки: Равномерно распределенная нагрузка $q = 7 \text{ кН/м}^2$.

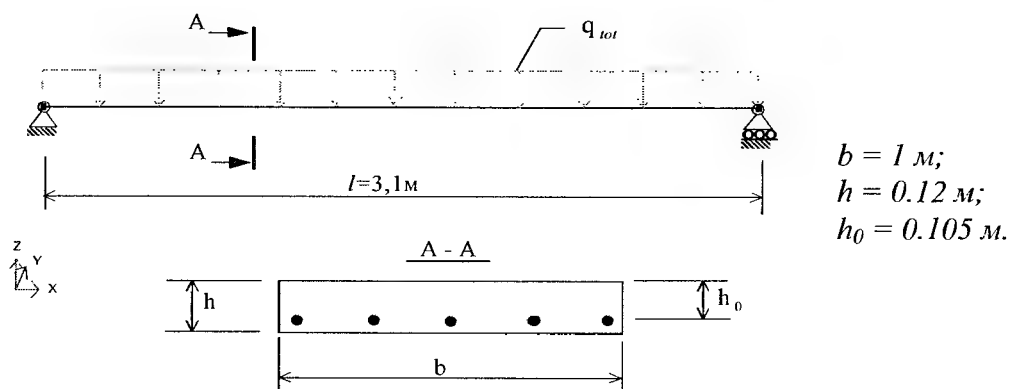
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
l/2	Прогиб δ , мм	13,5	12,412	8,06
	М, кНм	8,4	8,46	0,71
	Предельный момент М, тм	1,145	1,2	4,8

Тест 15 Железобетонная балка под распределенной нагрузкой

Аналитическое решение: ЦНИИпромзданий НИИЖБ Госстроя СССР. *Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелых и легких бетонов без предварительного напряжения арматуры* (к СНиП 2.03-84), Москва, 1986, стр. 139.

Геометрия:



Характеристика материала:

Бетон тяжелый марки В25: $E_b = 2.7 \times 10^4 \text{ МПа}$, $R_{bt,ser} = 1.6 \text{ МПа}$, $\nu = 0.2$.
 Растянутая арматура класса А-III: $E_s = 2.1 \times 10^5 \text{ МПа}$;
 площадь арматуры: $A_s = 393 \text{ мм}^2$.

Граничные условия: Свободное опирание.

Нагрузки: Равномерно распределенная нагрузка $q = 7 \text{ кН/м}$.

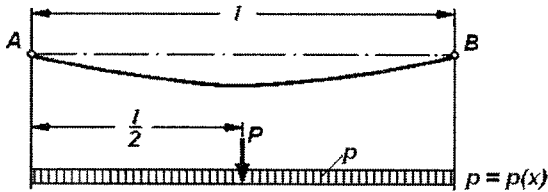
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
l/2	Прогиб δ , мм	13,5	13,9493	3,33
	М, кНм	8,4	8,40875	0,1
	Предельный момент М, тм	1,145	1,15756	1,1

Тест 16 Стальной канат с заданной стрелой провеса

Аналитическое решение: Справочник проектировщика расчетно-теоретический, под ред. проф. А.А. Уманского, М.: «Стройиздат», 1960, стр. 321 – 327.

Геометрия:



$$\begin{aligned} l &= 100 \text{ м}; \\ F &= 12 \text{ см}^2; \\ f &= 5 \text{ м}. \end{aligned}$$

Характеристика материала: $E = 16 \times 10^6 \text{ т/м}^2$.

Граничные условия: Точки A и B закреплены.

Нагрузки: $P = 1 \text{ т}$, вес каната $g = 10 \text{ кг/м}$.

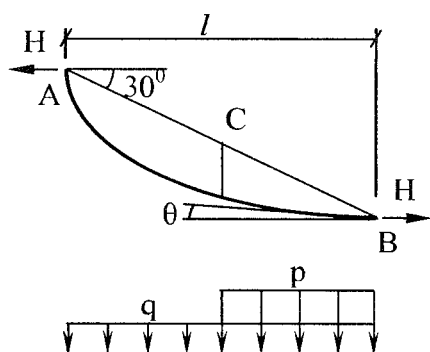
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
	Распор H , т	6,45	6,46	0,15
	$N_{\max}$, т	6,53	6,54	0,15
$l/2$	$Y_{\max}$, м	5,81	5,825	0,26

Тест 17 Нить с разновысокими опорами

Аналитическое решение: Справочник проектировщика, М.: «Стройиздат», 1972, т.1, стр. 582 – 583.

Геометрия:



$l = 100 \text{ м};$
 $F = 15.96 \times 10^{-4} \text{ м}^2;$
 $L_{\text{заготовки}} = 116.942 \text{ м}.$

Характеристика материала: $E = 1.6 \times 10^7 \text{ т/м}^2.$

Граничные условия: $w_A = u_A = w_B = u_B = 0.$

Нагрузки: $p = 0.42 \text{ т/м}, q = 0.5 \text{ т/м}.$

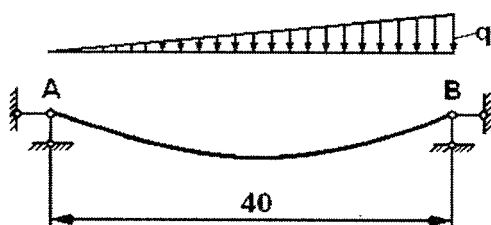
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
С	$w_C, \text{ м}$	-10,164	-10,166	0,02
А	$N_A, \text{ т}$	119,0	118,5	0,42
А	Распор Н, т	87,314	87,0	0,36
В	$\text{tg}\theta$	0,1106	0,1148	3,8

w_C отсчитывается от точки С.

Тест 18 Стальной канат с заданной начальной длиной

Аналитическое решение: Л. Г. Дмитриев, А. В. Касилов *Вантовые покрытия (Расчет и конструирование)*, Издательство «Будівельник», Киев, 1968, стр. 66 – 70.

Геометрия:

$$l_0 = 40 \text{ м};$$

$$l = 41 \text{ м};$$

$$F = 4.91 \text{ см}^2.$$

Характеристика материала: $E = 2 \times 10^7 \text{ т/м}^2$.

Граничные условия: Точки А и В закреплены.

Нагрузки: Распределенная вдоль пролета по закону треугольника $q = 0.5 \text{ т/м}$.

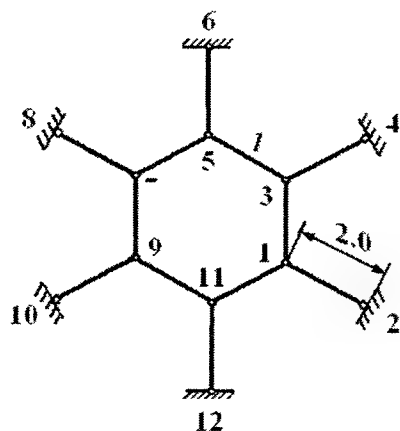
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
А	$N_{\max}, \text{ т}$	13	13,03	0,23
	$Y_{\max}, \text{ м}$	3,925	4,026	2,57

Тест 19 Вантовая сеть

Аналитическое решение: Л. Г. Дмитриев, А. В. Касилов *Вантовые покрытия (Расчет и конструирование)*, Издательство «Будівельник», Киев, 1968, стр. 71 – 74.

Геометрия:



$l = 2 \text{ м};$

$F = 4.91 \text{ см}^2;$

точки 1, 3, 5, 7, 9 и 11 на 0,5 м
ниже закрепленных точек.

Характеристика материала: $E = 2 \times 10^7 \text{ т/м}^2$.

Граничные условия: Точки 2, 4, 6, 8, 10 и 12 закреплены.

Нагрузки: $P_7 = 1.5 \text{ т}, P_9 = 2 \text{ т}, P_{11} = 3 \text{ т}.$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

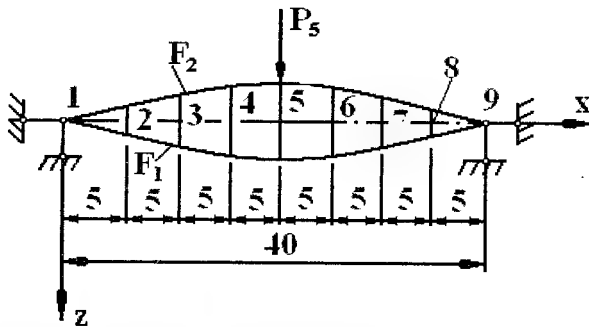
Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
1	$w_1, \text{ м}$	0,214	0,202	5,61
3	$w_3, \text{ м}$	0,333	0,324	2,7
5	$w_5, \text{ м}$	0,286	0,274	4,2
7	$w_7, \text{ м}$	0,024	0,026	8,33
9	$w_9, \text{ м}$	-0,143	-0,147	2,8
11	$w_{11}, \text{ м}$	-0,191	-0,187	2,1

Примечание: Аналитическое решение получено в предположении отсутствия горизонтальных перемещений. В результате расчета получены и горизонтальные перемещения, что объясняет отличие результатов расчета от аналитического решения.

Тест 20 Вантовая ферма.

Аналитическое решение: Л. Г. Дмитриев, А. В. Касилов *Вантовые покрытия (Расчет и конструирование)*, Издательство «Будівельник», Киев, 1968, стр. 75 – 81.

Геометрия:



$$\begin{aligned} l &= 40 \text{ м}; \\ h_2 &= 2.625 \text{ м}; \\ h_3 &= 4.5 \text{ м}; \\ h_4 &= 5.625 \text{ м}; \\ h_5 &= 6 \text{ м}; \\ F_1 &= 6 \text{ см}^2; \\ F_2 &= 4 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

Характеристика материала: нити $E = 2 \times 10^7 \text{ т/м}^2$, вертикальные распорки $EF = 2 \times 10^6 \text{ т}$.

Граничные условия: Точки 1 и 9 закреплены.

Нагрузки: $P_5 = 4 \text{ т}$, предварительное напряжение нитей поясов $H = 10 \text{ т}$.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

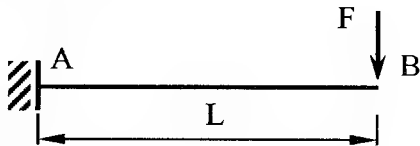
Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
	$N_1, \text{ т}$	20,53	19,36	5,7
	$N_2, \text{ т}$	10,79	9,55	11,5
2	$w_2, \text{ м}$	0,0895	0,0873	2,46
3	$w_3, \text{ м}$	0,062	0,0527	15
4	$w_4, \text{ м}$	-0,0825	-0,1075	30,3
5	$w_5, \text{ м}$	-0,343	-0,395	15,16

Примечание: Аналитическое решение получено в предположении, что усилия N_1 и N_2 в верхнем и нижнем поясах фермы постоянны по длине. В расчете это предположение не использовалось, усилия получены не постоянными, чем и объясняется отличие результатов расчета от аналитического.

Тест 21 Сильный изгиб консоли

Аналитическое решение: Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц *Теория упругости*, М.: «Наука», 1987, стр. 106.

Геометрия:



$$\begin{aligned} L &= 10 \text{ м}; \\ A &= 0.05 \text{ м}^2; \\ I &= 5 \times 10^{-6} \text{ м}^4. \end{aligned}$$

Характеристика материала: $E = 2 \times 10^7 \text{ т/м}^2$.

Граничные условия: Точка А закреплена.

Нагрузки: $F = 4 \text{ т}$.

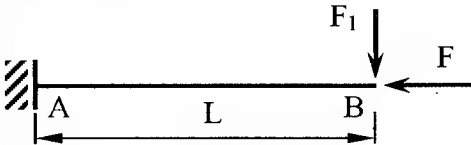
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
В	u_B , м	-3,29	-3,29	0
В	w_B , м	-6,7	-6,75	0,74
А	M_A , тм	26,8	27,0	0,74

Тест 22 Закритический изгиб консоли

Аналитическое решение: Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц *Теория упругости*, М.: «Наука», 1987, стр. 107.

Геометрия:



$$\begin{aligned} L &= 10 \text{ м}; \\ A &= 0.02 \text{ м}^2; \\ I &= 2 \times 10^{-6} \text{ м}^4. \end{aligned}$$

Характеристика материала: $E = 2 \times 10^7 \text{ т/м}^2$.

Граничные условия: Точка А закреплена.

Нагрузки: $F = 1.1 \text{ т}$, $F_1 = 1 \times 10^{-5} \text{ т}$.

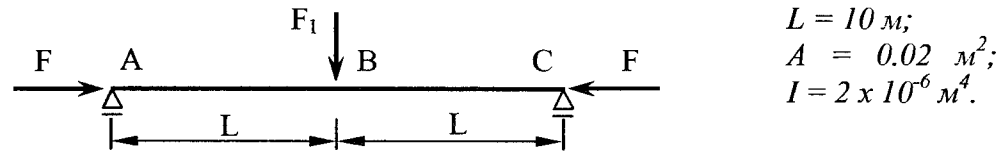
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
В	u_B , м	-1,82	-1,87	2,75
В	w_B , м	-5,05	-5,12	1,4

Тест 23 Закритический изгиб шарнирно опертого стержня

Аналитическое решение: Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц *Теория упругости*, М.: «Наука», 1987, стр. 107.

Геометрия:



Характеристика материала: $E = 2 \times 10^7 \text{ т/м}^2$.

Граничные условия: $w_A = w_C = 0, u_B = 0$.

Нагрузки: $F = 1.1 \text{ т}, F_1 = 1 \times 10^{-5} \text{ т}$.

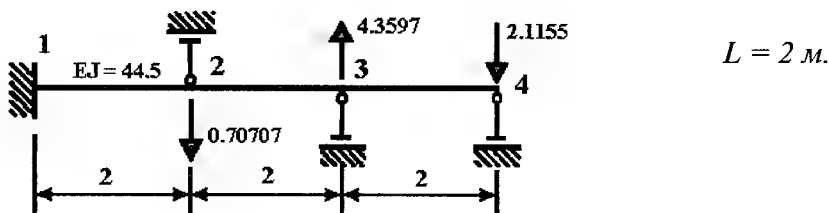
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
A	$u_A, \text{ м}$	1,82	1,88	3,3
C	$u_C, \text{ м}$	-1,82	-1,88	3,3
B	$w_B, \text{ м}$	5,05	5,15	2

Тест 24 Консольный стержень на односторонних опорах

Аналитическое решение: А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер *Расчетные модели сооружений и возможность их анализа*, Киев: «Сталь», 2002, стр. 122.

Геометрия:



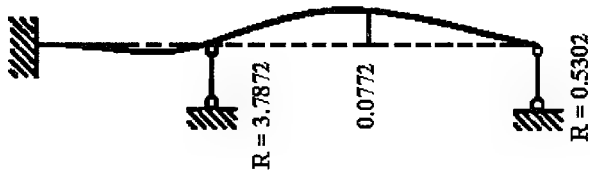
Характеристика материала: Жесткость стержня на изгиб $EI = 44.5 \text{ т/м}^2$, жесткость односторонних связей $EF/l = 10^6 \text{ т/м.}$

Граничные условия: Узел 1 зашце́млен, узел 2 – односторонняя связь, препятствующая перемещению вверх, узлы 3 и 4 – односторонние связи, препятствующие перемещению вниз.

Нагрузки: $F_2 = 0.70707 \text{ т}$, $F_3 = -4.3597 \text{ т}$, $F_4 = 2.1155 \text{ т}$.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

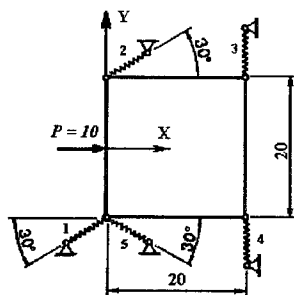
Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
3	$w_3, \text{ м}$	0,0772	0,0772	0
2	$R_2, \text{ т}$	3,7872	3,7872	0
4	$R_4, \text{ т}$	0,5302	0,5302	0



Тест 25 Система с односторонними пружинами

Аналитическое решение: А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер *Расчетные модели сооружений и возможность их анализа*, Киев: «Сталь», 2002, стр. 123.

Геометрия:



$L = 20 \text{ м};$
 $h = 1 \text{ м};$
 $\alpha = 30^{\circ}.$

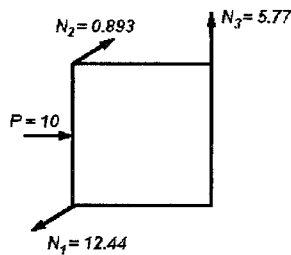
Характеристика материала: $E = 2 \times 10^7 \text{ т/м}^2$, жесткость пружин $EF/l = 10^8 \text{ т/м}.$

Граничные условия: Балка-стенка прикреплена к опорам пятью пружинами, работающими только на растяжение.

Нагрузки: $P = 10 \text{ т}.$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

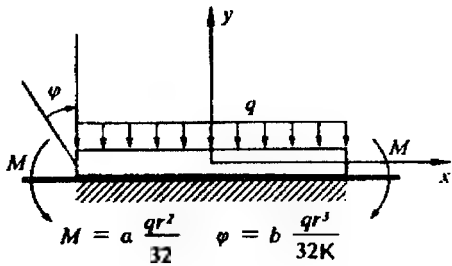
Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
	$N_1, \text{ т}$	12,44	12,44	0
	$N_2, \text{ т}$	0,893	0,893	0
	$N_3, \text{ т}$	5,77	5,77	0
	$N_4 = N_5, \text{ т}$	0	0	0



Тест 26 Круглая плита на одностороннем упругом основании

Аналитическое решение: П. Панагиотопулос *Неравенства в механике и их приложения*, Москва: «Мир», 1989, стр. 384.

Геометрия:



$R = 6 \text{ м};$
 $h = 0.06 \text{ м}.$

Характеристика материала: $E = 2.1 \times 10^7 \text{ т/м}^2$, $\nu = 0$.

Граничные условия: Одностороннее упругое основание.

Нагрузки: $q = 0.06 \text{ т/м}^2$, распределенный по границе момент $M = 0.0675 \alpha \text{ тм/м}.$

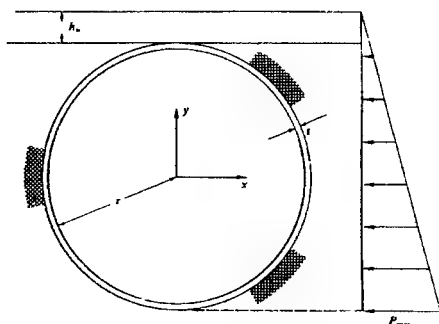
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

α	Искомая величина	Аналитическое решение	Численное решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
1	φ , рад $\times 10^5$	7,5	7,29	7,25	3,33
2		23,0	22,236	22,15	3,7
3		43,9	43,18	43,67	0,52
4		71,5	72,38	72,0	0,7
5		107,14	107,18	107,0	0,13
5,1		126,5	126,12	118,7	6,2
1	Область контакта, г, м	3,78	3,70	3,78	0
2		2,64	2,58	2,64	0
3		1,56	1,62	1,56	0
4		0,54	0,60	0,54	0
5		0	0	0	0
5,1		нет контакта	нет контакта	нет контакта	

Тест 27 Контактная задача для цилиндра

Аналитическое решение: П. Панагиотопулос *Неравенства в механике и их приложения*, Москва: «Мир», 1989, стр. 387.

Геометрия:



$$r = 1.315 \text{ м};$$

$$h = 0.04 \text{ м}.$$

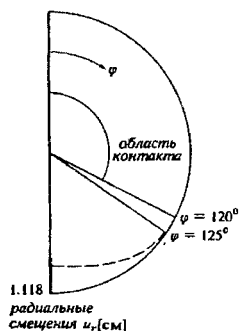
Характеристика материала: $E = 6 \times 10^4 \text{ т/м}^2$, $\nu = 0.3$, жесткость односторонних связей $EF/l = 10^6 \text{ т/м}$.

Граничные условия: Запрещены радиальные перемещения наружу.

Нагрузки: Внешнее давление изменяется по глубине z , $0 < z < 2l$, по линейному закону $Fr = 0.58(1.18 + z) \text{ т/м}^2$.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

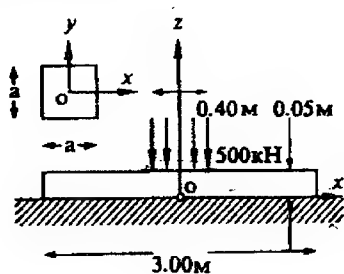
Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
	$\varphi, ^\circ$	120	116	3,33
	$u_r, \text{ м}$	0,01118	0,01114	0,36



Тест 28 Квадратная плита на одностороннем жестком основании

Аналитическое решение: П. Панагиотопулос *Неравенства в механике и их приложения*, Москва: «Мир», 1989, стр. 367.

Геометрия:



$$a = 3 \text{ м};$$

$$h = 0.05 \text{ м}.$$

Характеристика материала: $E = 4.5 \times 10^6 \text{ т/м}^2$, $\nu = 0.2$.

Граничные условия: Одностороннее жесткое основание.

Нагрузки: Симметрично относительно центра плиты по квадрату со стороной 0.8 м приложена нагрузка $q = 50 \text{ т/м}^2$.

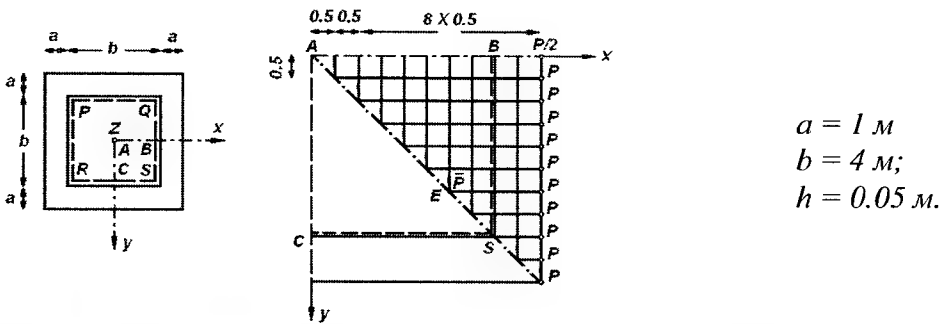
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
	Область контакта	квадрат со стороной $0,9 \text{ м}$	квадрат со стороной $0,9 \text{ м}$	0

Тест 29 Динамическая односторонняя контактная задача для квадратной пластины

Аналитическое решение: П. Панагиотопулос *Неравенства в механике и их приложения*, Москва: «Мир», 1989, стр. 408 - 415.

Геометрия:

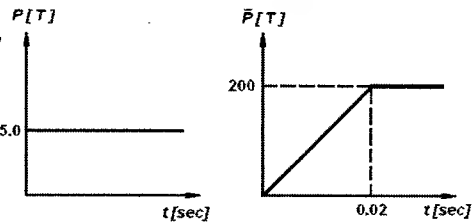


Характеристика материала: $E = 4 \times 10^7 \text{ т/м}^2$, $\nu = 0.16$, $\rho_g = 2.5 \text{ т/м}^2$, $g = 9.81 \text{ м/с}^2$, коэф. упругости односторонних пружин Винклера $k = 3 \times 10^4 \text{ т/м}^3$.

Граничные условия: По квадрату ASPQ – одностороннее упругое основание (сжатие)

Нагрузки: По линиям CD и BD – мгновенно приложенная постоянная распределенная по линии сила $P = 5 \text{ т/м};$

в точке А – $P_I = 200 \text{ т};$
в точке Е – сила P



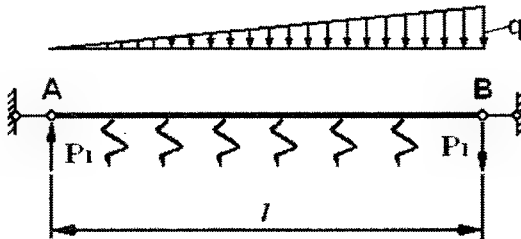
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
A	$W_{\max}, \text{ М}$	$3,95 \times 10^{-2}$ ($t = 4,9 \times 10^{-3} \text{ с}$)	$4,1 \times 10^{-2}$ ($t = 4,92 \times 10^{-3} \text{ с}$)	3,8 (0,4)
D	$W_{\max}, \text{ М}$	$5,55 \times 10^{-2}$ ($t = 2 \times 10^{-2} \text{ с}$)	$5,99 \times 10^{-2}$ ($t = 2 \times 10^{-2} \text{ с}$)	7,93 (0)
L	$W_{\max}, \text{ М}$	$6,75 \times 10^{-3}$ ($t = 1,5 \times 10^{-2} \text{ с}$)	$6,84 \times 10^{-3}$ ($t = 1,45 \times 10^{-2} \text{ с}$)	1,33 (3,33)

Тест 30 Стержень на упругом основании

Аналитическое решение: $w = -qx/(C_1q)$, $M = 0$, $Q = -C_2q/(C_1l)$.

Геометрия:



$l = 10 \text{ м};$
 $I = 2 \times 10^{-6} \text{ м}^4;$
 $A = 0.003 \text{ м}^2;$
 сдвиговая площадь
 $F = 0.0025 \text{ м}^2.$

Характеристика материала: $E = 2.1 \times 10^7 \text{ т/м}^2$, $G = 7.875 \times 10^6 \text{ т/м}^2$.

Граничные условия: Упругое основание: $C_1 = 500 \text{ т/м}^2$, $C_2 = 100 \text{ т};$
 $u_A = u_B = 0.$

Нагрузки: $q = 50 \text{ т/м}$, $P_2 = -P_1 = 1 \text{ т}.$

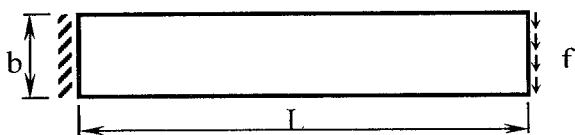
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
В	Перемещение w_B , м	-0,1	-0,1	0
Любая	Момент M_y , тм	0	0	0
Любая	Сила Q_z , т	1	1	0
Любая	Угол поворота θ_y , рад	0,01	0,01	0
А	Перемещение w_A , м	0	0	0

Тест 31 Устойчивость оболочки

Аналитическое решение: Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц *Теория упругости*, М.: «Наука», 1987, стр. 123.

Геометрия:



$b = 0.5 \text{ м};$
 $L = 10 \text{ м};$
 $h = 0.1 \text{ м}.$

Характеристика материала: $E = 2 \times 10^7 \text{ т/м}^2$, $\nu = 0.3$.

Граничные условия: Левая сторона защемлена.

Нагрузки: $f = 20 \text{ т/м}.$

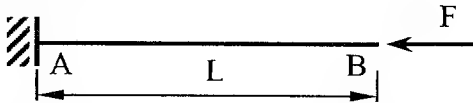
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Загружение	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
1	Коэф. запаса	4,39	4,32	1,6

Тест 32 Устойчивость консоли

Аналитическое решение: Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц *Теория упругости*, М.: «Наука», 1987, стр. 120.

Геометрия:



$$L = 10 \text{ м.}$$

Характеристика материала: $EI = 100 \text{ тм}^2$.

Граничные условия: Точка А закреплена.

Нагрузки: $F = 1 \text{ т.}$

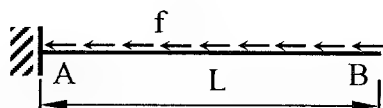
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
	Коэф. запаса	2,4674	2,4674	0

Тест 33 Устойчивость равномерно нагруженной консоли

Аналитическое решение: Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц *Теория упругости*, М.: «Наука», 1987, стр. 122.

Геометрия:



$$L = 10 \text{ м.}$$

Характеристика материала: $EI = 1000 \text{ тм}^2$.

Граничные условия: Точка А закреплена.

Нагрузки: $f = 1 \text{ т/м}$.

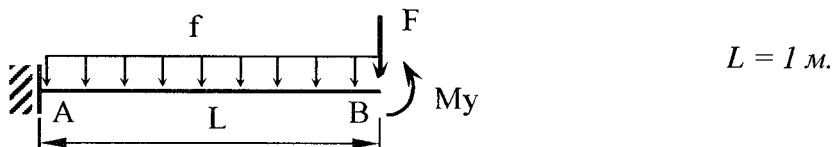
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
	Козф. запаса	7,843	7,837	0,08

Тест 34 Устойчивость плоской формы изгиба консоли

Аналитическое решение: Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц *Теория упругости*, М.: «Наука», 1987, стр. 123.

Геометрия:



Характеристика материала: $EI_y = 300 \text{ мм}^2$, $EI_z = GI = 1 \text{ мм}^2$.

Граничные условия: Точка А закреплена.

Точка В:

- 1. без граничных условий;
- 2. $\theta_x = 0$;
- 3. $v = \theta_x = 0$;
- 4. $\theta_x = \theta_z = 0$.

Нагрузки: $f = 1 \text{ т/м}$, $F = 1 \text{ т}$, $My = 1 \text{ тм}$.

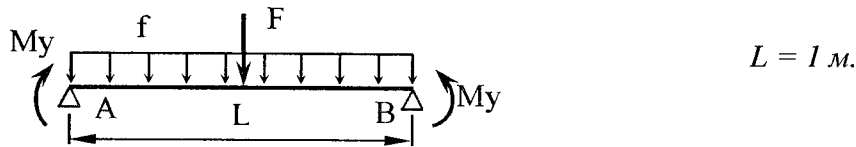
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Нагрузка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
Граничное условие 1				
F	Критическая сила	4,012	4,013	0,02
My/L		$\pi/2$	1,571	0
fL		12,86	12,85	0,08
Граничное условие 2				
F	Критическая сила	5,54	5,552	0,22
My/L		π	3,142	0,01
fL		15,9	15,95	0,31
Граничное условие 3				
F	Критическая сила	10,3	10,31	0,1
My/L		4,5	4,494	0,13
fL		33,15	33,132	0,05
Граничное условие 4				
F	Критическая сила	9,25	9,233	0,18
My/L		2π	6,284	0,01
fL		23,3	23,3	0

Тест 35 Устойчивость плоской формы изгиба шарнирно опертой балки

Аналитическое решение: Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц *Теория упругости*, М.: «Наука», 1987, стр. 123.

Геометрия:



Характеристика материала: $EI_y = 300 \text{ мм}^2$, $EI_z = GI = 1 \text{ мм}^2$.

Граничные условия:

1. $u_A = u_B = v_A = v_B = w_A = w_B = \theta_{xA} = \theta_{xB} = 0$;
2. $u_A = u_B = v_A = v_B = w_A = w_B = \theta_{xA} = \theta_{xB} = \theta_{zA} = \theta_{zB} = 0$.

Нагрузки: f приложена по всей длине стержня и на левую его половину $f = 1 \text{ м/м}$, $F = 1 \text{ м}$,
 $My = 1 \text{ мм}$.

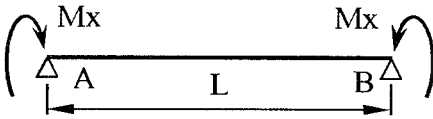
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Нагрузка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
Граничное условие 1				
F	Критическая сила	16,914	16,936	1,9
My		π	3,142	0,01
fL		28,27	28,32	0,18
fL/2		27,32	27,31	0,04
Граничное условие 2				
F	Критическая сила	25,9	25,9	0
My		2π	6,284	0,01
fL		47,6	47,59	0,02
fL/2		45,3	45,23	0,15

Тест 36 Устойчивость при кручении

Аналитическое решение: Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц *Теория упругости*, М.: «Наука», 1987, стр. 121.

Геометрия:



$$L = 1 \text{ м.}$$

Характеристика материала: $EI_y = EI_z = 100 \text{ мм}^2$, $GI = 80 \text{ мм}^2$.

Граничные условия:

1. $u_A = u_B = v_A = v_B = w_A = w_B = 0$;
2. $u_A = u_B = v_A = v_B = w_A = w_B = \theta_{YA} = \theta_{YB} = 0$;
3. $u_A = u_B = v_A = v_B = w_A = w_B = \theta_{YA} = \theta_{YB} = \theta_{ZA} = \theta_{ZB} = 0$.

Нагрузки: $Mx = 1 \text{ тм}$.

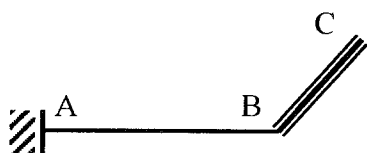
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Граничное условие	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
1	Критический момент	4,91	4,912	0,04
2	Критический момент	2π	6,285	0,03
3	Критический момент	8,987	8,991	0,04

Тест 37 Устойчивость стержня с жесткими вставками

Аналитическое решение: Расчет с заменой жесткой вставки стержнем большой жесткости.

Геометрия:



	A	B	C
X	0	4	6
Y	0	0	-4
Z	0	0	3

Характеристика материала: $EA = 2.7 \times 10^5 \text{ т}$, $EI_y = EI_z = 2025 \text{ тм}^2$,
 $GI = 4000 \text{ тм}^2$,

BC – жесткая вставка.

Граничные условия: Точка А закреплена.

Нагрузки: Точка С:

Загружение 1: $F_x = 40 \text{ т}$,

Загружение 2: $F_y = 20 \text{ т}$,

Загружение 3: $F_z = 10 \text{ т}$.

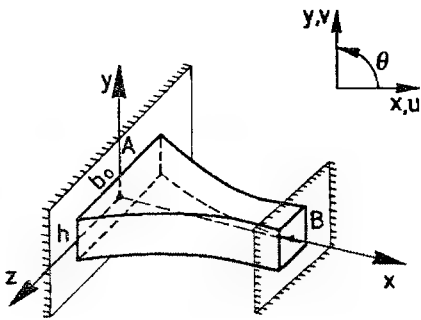
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Загружение	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
1	Коэф. запаса по загружениям	3,676	3,677	0,03
2		6,53	6,34	0,15
3		16,875	16,875	0
1	Коэф. запаса с учетом изгибно-крутильных форм	1,6	1,6	0
2		4,5	4,5	0
3		8,7	8,7	0

Тест 38 Балка переменного сечения

Аналитическое решение: Société Française des Mécaniciens – Commission Validation de Progiciels de Calcul de Structures, Groupe de travail Dynamique, Paris, 1989.

Геометрия:



Изгиб в плоскости (x, y) .

Длина: $l = AB = 0.6 \text{ м}$;

толщина: $h = 0.01 \text{ м}$.

Координаты точек, м

	A	B
x	0.	0.6
y	0.	0.

Начальное сечение:

$$b_0 = 0.03 \text{ м}$$

$$A_0 = 3 \times 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$I_{z0} = 0.25 \times 10^{-8} \text{ м}^4$$

Изменение сечения (при $\alpha = 1$):

$$b = b_0 e^{-2\alpha x}$$

$$A = A_0 e^{-2\alpha x}$$

$$I_z = I_{z0} e^{-2\alpha x}$$

Характеристика материала: $E = 2 \times 10^{11} \text{ Па}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$.

Граничные условия: Точки A и B: заземлены ($u = v = 0$; $\theta = 0$).

Нагрузки: Для модального анализа.

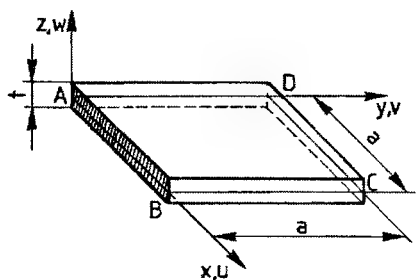
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Порядок формы	Частота, Гц		Погрешность, %
	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	
1	143,303	145,748	1,71
2	396,821	400,063	0,82
3	779,425	782,865	0,44
4	1289,577	1292,848	0,25

Тест 39 Тонкая плита

Аналитическое решение: M.V. Barton, “Vibration of rectangular and skew cantilever plates”, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, 1951, p. 129 – 134.

Геометрия:



Сторона: $a = 1\text{ м}$
Толщина: $t = 0.01\text{ м}$

Координаты точек, м

	A	B	C	D
x	0	1	1	0
y	0	0	1	1
z	0	0	0	0

Характеристика материала: $E = 2.1 \times 10^{11}\text{ Па}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800\text{ кг/м}^3$.

Граничные условия:

- 1. Сторона АВ: закреплена ($u = v = w = 0$; $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$).
- 2. Свободная плита.

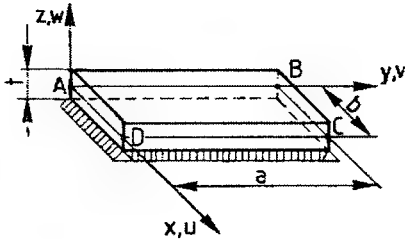
Нагрузки: Для модального анализа.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Порядок формы	Частота, Гц		Погрешность, %
	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	
Плита, заземленная с одной стороны			
1	8,7266	8,6646	0,71
2	21,3042	21,1988	0,5
3	53,5542	52,9443	1,14
4	68,2984	67,4643	1,22
5	77,7448	76,924	1,06
6	136,0471	134,053	1,47
Свободная плита			
1, 2, 3, 4, 5, 6	0	1,14	
7	33,7119	33,5532	0,47
8	49,4558	48,5638	1,8
9	61,0513	60,2526	1,31
10	87,5160	86,2068	1,5
11	87,5160	86,2068	1,5

Тест 40 Шарнирно опертая прямоугольная плита

Аналитическое решение: M.V. Barton, “Vibration of rectangular and skew cantilever plates”, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, 1951, p. 129 – 134.

Геометрия:

Длина: $a = 1.5$ м

Ширина: $b = 1$ м

Толщина: $t = 0.01$ м

Координаты точек, м

	A	B	C	D
x	0	0	1	1
y	0	1.5	1.5	0
z	0	0	0	0

Характеристика материала: $E = 2.1 \times 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800$ кг/м³.

Граничные условия: Все стороны шарнирно оперты.

Нагрузки: Для модального анализа.

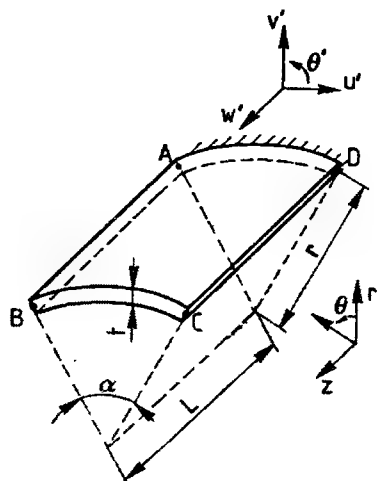
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Порядок формы	Частота, Гц		Погрешность, %
	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	
1	35,63	35,575	0,15
2	68,51	68,333	0,26
3	109,62	109,397	0,2
4	123,32	122,945	0,3
5	142,51	141,686	0,58
6	197,32	195,611	0,87

Тест 41 Цилиндрическая оболочка

Аналитическое решение: P. Geoffroy, *Développement et évaluation d'un élément fini pour l'analyse non linéaire statique et dynamique des coques minces*, Thèse de doctorat d'ingénieur, Université de Technologie de Compiègne, Division MNM, 1983.

Геометрия:



$\alpha = 0.5 \text{ rad}$
 $AD = l = 0.3048 \text{ м}$
 $t = 3.048 \times 10^{-3} \text{ м}$
 $r = 2l = 0.6096 \text{ м}.$

Координаты точек, м

	A	B	C	D
r	2l	2l	2l	2l
θ	+0.25rd	+0.25rd	-	-
z	0	l	l	0

Характеристика материала: $E = 2.0685 \times 10^{11} \text{ Па}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7857.2 \text{ кг/м}^3$.

Граничные условия: Дуга AD закреплена.

Нагрузки: Для модального анализа.

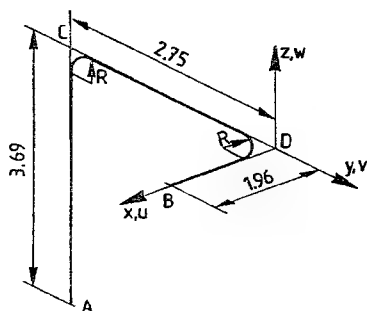
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Порядок формы	Частота, Гц		Погрешность, %
	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	
1	85,6	85,915	0,37
2	134,5	138,474	2,95
3	259	245,785	5,1
4	351	341,821	2,62
5	395	384,537	2,65
6	531	522,158	1,67

Тест 42 Задача Ховгаарда

Аналитическое решение: W. Hovgaard, "Stress in three dimensional pipe-bends", *Transactions of ASME*, vol. 57, FSP 75 – 12, p. 401 – 416.

Геометрия:



Круглое поперечное сечение:

Площадь: $A = 0.3439 \times 10^{-2} \text{ м}^2$

радиус изгиба: $R = 0.922 \text{ м}$

толщина: $e = 0.00612 \text{ м}$

внешний радиус: $Re = 0.0925 \text{ м}$

внутренний радиус: $Ri = 0.08638 \text{ м}$

моменты инерции: $I_y = I_z = 0.1377 \times 10^{-4} \text{ м}^4$

(прямые элементы)

$I_y = I_z = 0.5887 \times 10^{-5} \text{ м}^4$

(изогнутые элементы)

Координаты точек, м

	A	B	C	D
x	0	1.96	0	0
y	-2.75	0	-2.75	0
z	-3.69	0	0	0

Характеристика материала:

$E = 1.658 \times 10^{11} \text{ Па}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 13404.106 \text{ кг/м}^3$ (труба заполненная водой).

Граничные условия: Точки А и В защемлены.

Нагрузки: Для модального анализа.

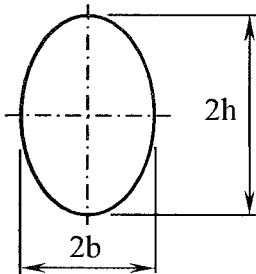
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Порядок формы	Частота, Гц		Погрешность, %
	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	
1	10,18	10,25	0,7
2	19,54	20,02	2,46
3	25,47	25,171	1,17
4	48,09	48,073	0,03
5	52,86	52,676	0,35
6	75,94	85	11,93
7	80,11	87,19	8,84
8	122,34	129,29	5,68
9	123,15	132,552	7,63

Тест 43 Определение геометрических характеристик эллипса

Аналитическое решение: Справочник проектировщика расчетно-теоретический, книга 1, стр. 368 – 374..

Геометрия:



$b = 30\text{ см};$
 $h = 50\text{ см}.$

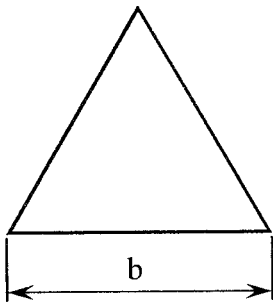
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Искомая величина		Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
Момент инерции при кручении I_k , см^4		$3,1185 \times 10^6$	$3,1145 \times 10^6$	0,13
Сдвиговая площадь относительно оси Y F_y , см^2		3720,46	3721,69	0,03
Сдвиговая площадь относительно оси Z F_z , см^2		4146,75	4144,4	0,06
Бимомент (секториальный момент) инерции I_w , см^6		$9,68 \times 10^7$	$9,7622 \times 10^7$	0,85
Координаты центра кручения, см	Yc	0	0	0
	Zc	0	0	0

Тест 44 Определение геометрических характеристик равностороннего треугольника

Аналитическое решение: Справочник проектировщика расчетно-теоретический, книга 1, стр. 368 – 374..

Геометрия:



$b = 40 \text{ см.}$

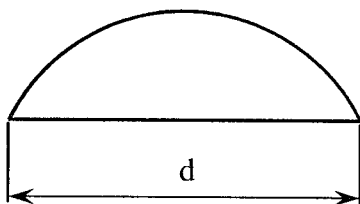
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Искомая величина		Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
Момент инерции при кручении I_k , см^4		55425,63	55437,8	0,02
Сдвиговая площадь относительно оси Y F_y , см^2		521,939	521,947	0,01
Сдвиговая площадь относительно оси Z F_z , см^2		521,939	521,932	0,01
Бимомент (секториальный момент) инерции I_w , см^6		175918	175931	0,01
Координаты центра кручения, см	Y_c	0	0	0
	Z_c	0	0	0

Тест 45 Определение геометрических характеристик полукруга

Аналитическое решение: Справочник проектировщика расчетно-теоретический, книга 1, стр. 368 – 374..

Геометрия:



$d = 50\text{ см.}$

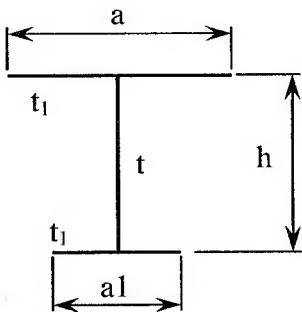
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Искомая величина		Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
Момент инерции при кручении I_k , см^4		$1,962 \times 10^6$	$1,9723 \times 10^6$	0,52
Сдвиговая площадь относительно оси Y F_y , см^2		2973,34	2970,03	0,11
Сдвиговая площадь относительно оси Z F_z , см^2		3439,86	3442,85	0,1
Бимомент (секториальный момент) инерции I_w , см^6		$9,723 \times 10^7$	$9,6693 \times 10^7$	0,55
Координаты центра кручения, см	Yc	0	0	0
	Zc	0	0	0

Тест 46 Определение геометрических характеристик тонкостенного сечения двутавра.

Аналитическое решение:

Геометрия:



$a = 16 \text{ см};$
 $a_1 = 10 \text{ см};$
 $t_1 = 1.2 \text{ см};$
 $t = 0.8 \text{ см};$
 $h = 25 \text{ см}.$

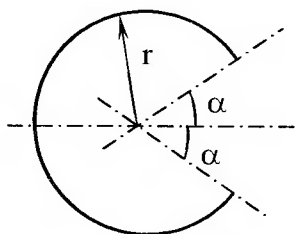
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Искомая величина		Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
Момент инерции при кручении $I_k, \text{см}^4$		19,37	19,24	0,67
Сдвиговая площадь вдоль оси Y $F_y, \text{см}^2$		22,56	22,63	0,31
Сдвиговая площадь вдоль оси Z $F_z, \text{см}^2$		19,12	19,04	0,42
Бимомент (секториальный момент) инерции $I_w, \text{см}^6$		50360,11	50369,89	0,02
Координаты центра кручения, см	Yc	0	0	0
	Zc	5,80	5,83	0,52

Тест 47 Определение геометрических характеристик тонкостенного сечения сектора кольца

Аналитическое решение:

Геометрия:



$$\begin{aligned}\alpha &= 30^\circ; \\ t &= 1.2 \text{ см}; \\ r &= 25 \text{ см}.\end{aligned}$$

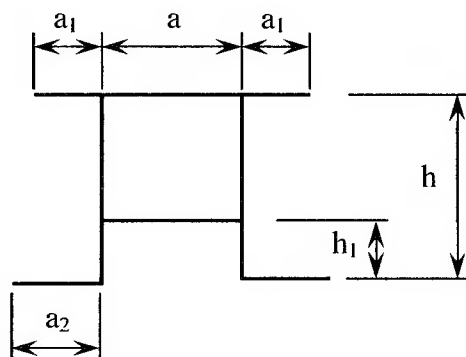
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Искомая величина		Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
Момент инерции при кручении I_k , см^4		90,55	90,48	0,08
Сдвиговая площадь вдоль оси Y F_y , см^2		104,33	104,25	0,08
Сдвиговая площадь вдоль оси Z F_z , см^2		42,69	42,73	0,1
Бимомент (секториальный момент) инерции I_w , см^6		56092009,95	56092001,09	0,01
Координаты центра кручения, см	Y_c	-48,71	-48,68	0,06
	Z_c	0	0	0

Тест 48 Определение геометрических характеристик тонкостенного полузамкнутого сечения

Аналитическое решение:

Геометрия:



$a = 24 \text{ см};$
 $a_1 = 4 \text{ см};$
 $a_2 = 6 \text{ см};$
 $t = 1 \text{ см};$
 $h_1 = 10 \text{ см};$
 $h = 40 \text{ см}.$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

Искомая величина		Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность, %
Момент инерции при кручении $I_k, \text{см}^4$		19238,64	19249,33	0,06
Сдвиговая площадь вдоль оси Y $F_y, \text{см}^2$		43,33	43,25	0,18
Сдвиговая площадь вдоль оси Z $F_z, \text{см}^2$		70,28	70,42	0,2
Бимомент (секториальный момент) инерции $I_w, \text{см}^6$		104526,58	104522,41	0,01
Координаты центра кручения, см	Yc	0	0	0
	Zc	5	4,96	0,8

**А.С. Городецкий
И.Д. Евзеров**

Компьютерные модели конструкций

ISBN 966 – 359 – 027 – 0

Подписано в печать 07.04.2005. Формат 84 × 108.
Печать офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. листов 21.

Издательство «ФАКТ», Киев –80, а/я 76